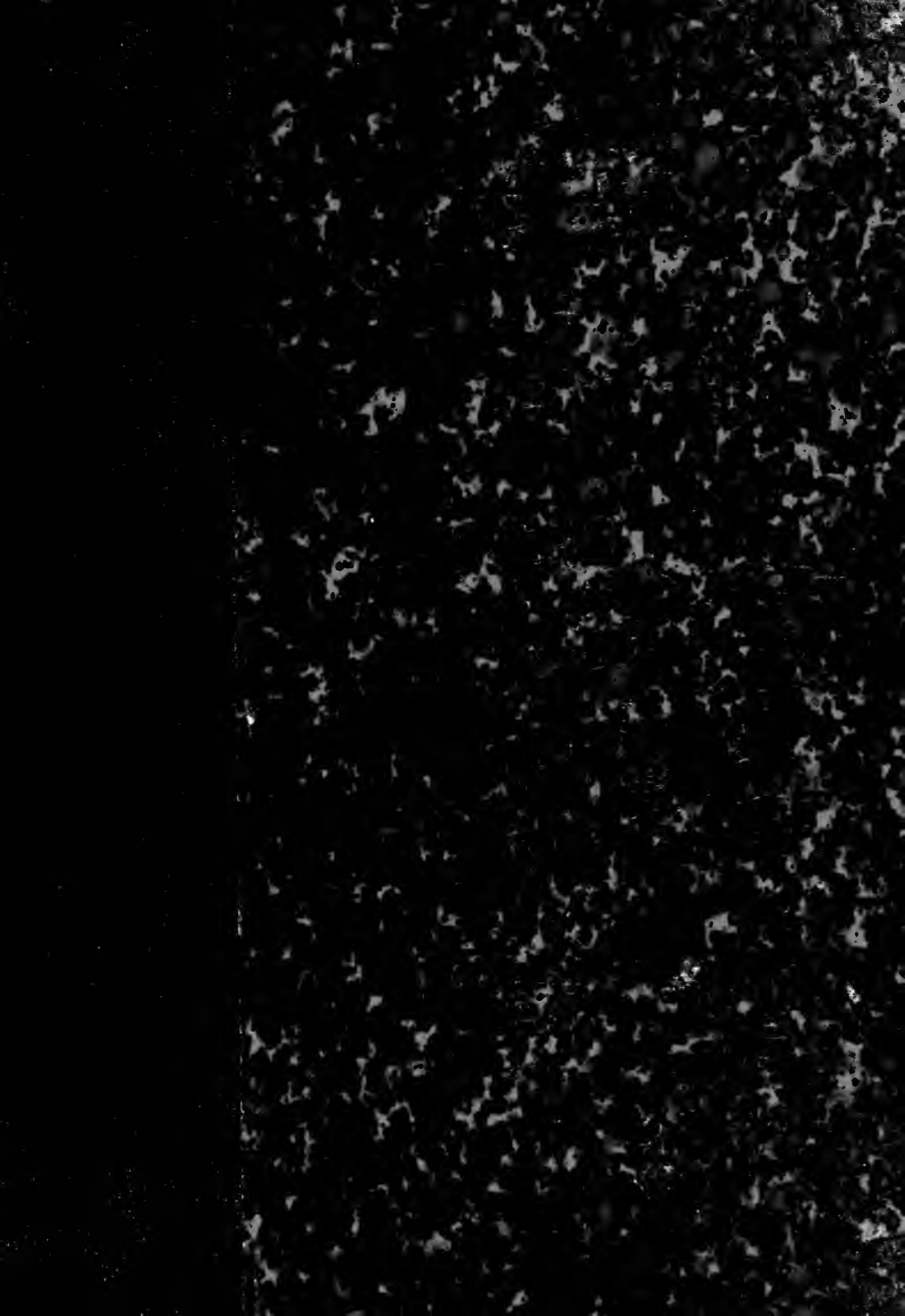
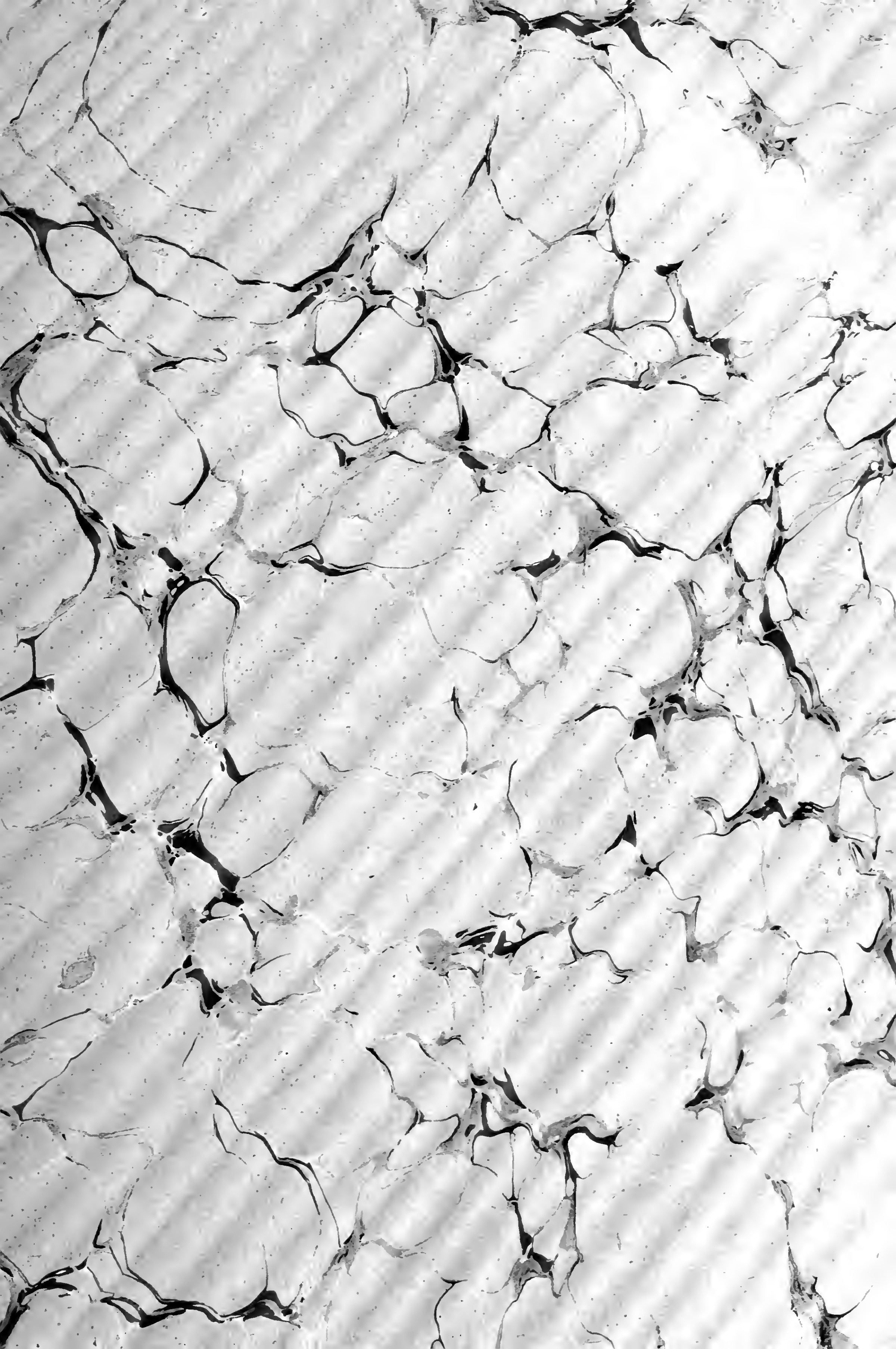






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME III. — ANNÉE 1858.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, n° 55.

1858

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME III.

Pages.

ERRATA.

Page	Ligne
71	5, *au lieu de* —, *lisez* +.
84	3 en remontant, *au lieu de* pair, *lisez* impair, *et ôtez* lui-même

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

DÉVELOPPEMENTS

SUR

UN CHAPITRE DE LA MÉCANIQUE DE POISSON;

PAR M. J. LIOUVILLE [*].

Cette Note a été écrite à une époque déjà bien ancienne, et (comme on pourra le voir) peu de temps après la mort de Poisson. Appelé à succéder à l'illustre géomètre au Bureau des Longitudes, je remplissais un pieux devoir en développant une idée dont Poisson m'avait parlé plusieurs fois, et à laquelle il attachait de l'importance. Le temps a manqué, même à ce travailleur infatigable. Il s'agissait d'étendre à un système quelconque de points matériels, où le principe des aires ait lieu, certaines transformations analytiques, que les équations fournies par ce principe admettent toujours, et que Poisson a données dans sa *Mécanique* pour le seul cas d'un système de forme invariable. Le calcul n'offrait rien de difficile. En l'effectuant dans la Note ci-après, j'ai ajouté un exemple de l'utilité des formules obtenues. Plus tard, j'ai communiqué au Bureau d'autres applications. Elles viendront à leur tour. Aujourd'hui je me borne à marquer le point de départ. J'aurais peut-être pu apporter quelques simplifications de détail à ma rédaction primitive. J'ai préféré n'y rien changer. Moins je m'écarte du texte même de Poisson, mieux, ce me semble, j'atteins mon but.

[*] Cet article a déjà paru, l'année dernière, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1859.

I.

On connaît les méthodes que les géomètres ont imaginées pour déterminer le mouvement de rotation d'un système de forme invariable. D'Alembert a ouvert la voie par son ouvrage sur la *Précession des équinoxes* [*], et jamais on n'a déployé une plus grande force d'invention : malheureusement l'élégance manque partout dans les formules et dans les détails du calcul; défaut singulier ou négligence qui se retrouve souvent dans les œuvres purement mathématiques de cet écrivain si distingué. Mais peut-on n'être pas saisi d'admiration pour son génie, quand on se reporte à l'époque où il composait son travail. On n'avait pas même alors les six équations générales de l'équilibre des systèmes libres. On connaissait les trois premières, qui expriment que la somme des composantes des forces parallèlement à une droite quelconque est nulle, mais non les trois autres, celles dites des *moments*, les seules qui restent quand on introduit un point fixe dans le système. Celles-là, d'Alembert les a données pour la première fois dans l'ouvrage même dont nous parlons; elles en forment la base essentielle. De là d'Alembert a passé *par son principe* [**] aux équations du mouvement; de sorte que tout lui appartient dans la mise en équation du problème. Il a fallu ensuite procéder aux approximations, intégrer, discuter au milieu des difficultés qu'offrait une analyse naissante et peu assurée dans sa marche. Enfin nous arrivons, et nous voilà maîtres d'un problème qui avait bravé tous les efforts de Newton lui-même; et en même temps que nous obtenons les lois de la *précession des équinoxes*, nous trouvons aussi la cause et l'explication mathématique du phénomène non moins curieux de la *nutation*, dont un astronome immortel, Bradley, venait de constater l'existence par une série d'observations précises [***].

Après d'Alembert, Euler, et avec lui l'élégance. C'est Euler qui a présenté sous leur forme définitive les équations du mouvement de

[*] Publié en 1749.

[**] *Traité de Dynamique*, publié en 1743.

[***] Bradley avait annoncé sa découverte en 1747; l'ouvrage de d'Alembert a paru deux ans après.

rotation d'un système de forme invariable. C'est lui aussi qui le premier a trouvé les intégrales rigoureuses pour le cas où les forces extérieures sont nulles. Ici, comme partout, éclate sa supériorité dans le calcul [*].

Lagrange, Laplace, et d'autres géomètres, Poisson en particulier, ont continué ce genre de questions, et ont résolu des problèmes nouveaux ou perfectionné les solutions anciennes.

Ils s'étaient tous bornés à la méthode analytique. En se livrant à une étude synthétique profonde avant de recourir au calcul, M. Poinsot, dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, a éclairé le sujet d'une plus vive lumière. Aussi les géomètres attendent-ils avec impatience la publication complète du beau travail de ce célèbre académicien [**].

Les solutions analytiques que l'on avait auparavant ne perdront pourtant rien de leur valeur. Elles ont leur mérite propre, et l'instruction qu'on tirera de leur étude sera longtemps encore une source de progrès pour la science.

Poisson, qui a traité de plusieurs manières la question du mouvement de rotation d'un système de forme invariable, tenait beaucoup, et avec raison, à la méthode qu'il a donnée dans sa *Mécanique* pour former les équations différentielles du problème [***]. La marche qu'il indique est en effet très-simple : ses formules sont élégantes; la symétrie qu'on y observe rend d'ailleurs les calculs faciles et groupe entre

---

[*] Euler a reconnu l'antériorité du travail de d'Alembert sur la précession des équinoxes; et son aveu, d'ailleurs, n'était pas nécessaire pour constater un fait patent. Ce grand géomètre avait été arrêté, jusque-là, par des obstacles qu'il jugeait presque insurmontables. Mais dès que d'Alembert a levé ces premières difficultés, qui touchaient surtout à la Mécanique, voyez comme Euler prend sa revanche, et quels progrès la méthode lui doit.

[**] M. Poinsot n'avait encore donné, à l'époque où j'écrivais cette Note, qu'un simple extrait de sa *Théorie* : on le retrouve à la fin de la dernière édition de sa *Statique*. La publication complète a eu lieu depuis dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1854, et dans le *Journal de Mathématiques* (1re série, tome XVI)

[***] *Voir* tome II, page 121 de la première édition, ou tome II, page 77 de la seconde. C'est à cette seconde édition, beaucoup plus complète, que se rapportent toutes nos citations.

eux les résultats, qui se déduisent à chaque instant les uns des autres par des permutations tournantes.

En s'occupant de la même question dans un Mémoire inséré au XVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [*], Poisson avait employé les équations des aires rapportées à des plans fixes, et il les avait changées par le calcul en équations rapportées à des axes mobiles. Il suit dans sa *Mécanique* une marche différente, et il applique directement à des axes mobiles, sinon les équations des aires, du moins la combinaison du principe de d'Alembert et des lois de l'équilibre qui les fournit. Cette manière de procéder exige quelques précautions et des transformations analytiques que Poisson développe avec soin.

Mais le principe des aires ne convient pas seulement aux systèmes de forme invariable. Il s'étend à une infinité d'autres systèmes pour lesquels le calcul de Poisson devrait être un peu modifié. Là, en effet, les axes principaux d'inertie pourront à chaque instant varier de position, non-seulement dans l'espace absolu, mais aussi par rapport aux divers points du système : les valeurs des moments d'inertie seront également variables.

Poisson se proposait de revenir une dernière fois sur son analyse, afin de l'étendre au cas général dont nous venons de parler. D'autres occupations l'ont entraîné, et il n'a pas exécuté ce projet dont il m'avait souvent entretenu.

Je vais essayer de suppléer, en cela du moins, au silence du grand géomètre que nous venons de perdre : ma tâche sera aisée, du reste, car je n'aurai pour ainsi dire qu'à commenter un chapitre de sa *Mécanique*.

II.

Nous considérons donc un système de molécules ou points matériels $m, m', m'', \ldots$, soumis à la seule condition que le principe des aires y ait lieu autour d'une certaine origine O, de telle sorte, qu'en rapportant le système à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, de direction

---

[*] *Voir* à la seconde partie du Mémoire *sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique*.

fixe et en désignant par mX, mY, mZ les composantes, suivant ces axes, des forces motrices extérieures qui peuvent agir sur chaque molécule de masse m, nous ayons les trois équations connues :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum m(yZ - zY),$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum m(zX - xZ),$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum m(xY - yX),$$

qui s'intègrent quand les seconds membres sont nuls, et donnent alors le principe plus particulier de la *conservation des aires*. Ces équations expriment que les sommes des moments des *forces perdues* pris par rapport à l'axe Ox, Oy, ou Oz sont toujours nulles. On les simplifie en représentant les seconds membres par une seule lettre L, M, N; elles deviennent ainsi :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = L,$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = M,$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = N.$$

Le signe $\sum$ s'applique à toutes les molécules m, m', m'',.... Ces molécules peuvent être libres ou attachées entre elles, et elles peuvent agir les unes sur les autres d'une manière quelconque, pourvu, bien entendu, que l'action et la réaction soient égales et directement opposées : nous n'avons point à tenir compte de ces forces intérieures dans les seconds membres de nos équations, où les termes qu'elles introduiraient se détruiraient entre eux, comme étant deux à deux égaux et de signes contraires. Le point O peut être fixe ou mobile, mais, dans ce dernier cas, il doit ou coïncider avec le centre de gravité du système, ou n'avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.

Cela posé, on mène par le point O trois autres axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 rectangulaires entre eux, mais d'ailleurs mobiles suivant une loi quelconque, et l'on demande de rapporter le principe des aires à ces axes

mobiles. C'est ce que l'on peut exécuter de différentes manières : soit en transformant analytiquement les équations écrites ci-dessus pour des axes de direction fixe, ainsi que Poisson l'a fait dans le XVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* soit en appliquant directement, et avec des précautions convenables, aux axes mobiles Ox_1, Oy_1, Oz_1 la condition d'égalité à zéro des sommes de moments des forces perdues : cette dernière méthode est celle que Poisson a suivie dans sa *Mécanique;* c'est, par conséquent, celle que nous voulons d'abord développer ici.

Nous adopterons naturellement la plupart des notations de Poisson, et en désignant avec lui par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles xOx_1, xOy_1, xOz_1, yOx_1, etc., nous aurons

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1. \end{aligned}$$

Les quantités a, b, c, a', etc., sont les mêmes à chaque instant pour tous les points du système m, m', m'',..., mais elles varient pendant le mouvement, et l'on doit les considérer comme des fonctions du temps t. Comme il ne s'agit plus ici d'un système de forme invariable auquel les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 seraient attachés, les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont aussi variables avec le temps.

En différentiant les valeurs de x, y, z par rapport à t, on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt} + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= x_1\frac{da'}{dt} + y_1\frac{db'}{dt} + z_1\frac{dc'}{dt} + a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= x_1\frac{da''}{dt} + y_1\frac{db''}{dt} + z_1\frac{dc''}{dt} + a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt}. \end{aligned}$$

Il faut rappeler ici certaines équations de condition très-connues qui ont lieu entre les quantités a, b, c, a', etc., et qui sont, les unes de cette forme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \ldots,$$

les autres de celle-ci

$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \qquad aa' + bb' + cc' = 0, \ldots;$$

en les différentiant, on en conclut

$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0, \qquad a\,da + a'\,da' + a''\,da'' = 0, \ldots,$$

et aussi

$$d(ab + a'b' + a''b'') = 0, \ldots;$$

on voit par là que les deux quantités

$$b\,da + b'\,da' + b''\,da''$$

et

$$a\,db + a'\,db' + a''\,db''$$

sont égales et de signes contraires. Posons donc, avec Poisson,

$$b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = -a\frac{db}{dt} - a'\frac{db'}{dt} - a''\frac{db''}{dt} = r,$$

et de même

$$c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt} = p,$$

$$a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = -c\frac{da}{dt} - c'\frac{da'}{dt} - c''\frac{da''}{dt} = q.$$

On sait qu'en exprimant les neuf cosinus a, b, c, a', etc., au moyen de trois angles φ, θ, ψ, ce qui donne

$$\begin{aligned}
a &= \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi,\\
b &= \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi,\\
c &= \sin\theta \sin\psi,\\
a' &= \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,\\
b' &= \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,\\
c' &= \sin\theta \cos\psi,\\
a'' &= -\sin\theta \sin\varphi,\\
b'' &= -\sin\theta \cos\varphi,\\
c'' &= \cos\theta,
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} pdt &= \sin\varphi \sin\theta\, d\psi - \cos\varphi\, d\theta, \\ qdt &= \cos\varphi \sin\theta\, d\psi + \sin\varphi\, d\theta, \\ rdt &= d\varphi - \cos\theta\, d\psi. \end{aligned}$$

Au moyen des expressions de a, b, etc., en θ, φ, ψ, il est aisé aussi de s'assurer que

$$bc' - cb' = a'', \qquad ca' - ac' = b'', \qquad ab' - ba' = c'', \qquad \text{etc.}$$

Enfin, on a les formules différentielles

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \qquad \frac{db}{dt} = cp - ar, \qquad \frac{dc}{dt} = aq - bp, \qquad \text{etc.}$$

Nous supposons que toutes ces formules sont familières au lecteur [*].

Revenant aux équations qui fournissent

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

multiplions la première de ces équations par a, la seconde par a', la troisième par a'', et faisons la somme. Faisons ensuite deux sommes analogues en prenant pour multiplicateurs b, b', b'' et c, c', c''. Nous trouverons sans difficulté

$$\begin{aligned} a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} &= qz_1 - ry_1 + \frac{dx_1}{dt}, \\ b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} &= rx_1 - pz_1 + \frac{dy_1}{dt}, \\ c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} &= py_1 - qx_1 + \frac{dz_1}{dt}. \end{aligned}$$

Multipliant à leur tour ces trois équations par a, b, c, ou par

[*] Disons à ce sujet que l'on doit compléter la *Mécanique* de Poisson, en y joignant le Mémoire *sur le mouvement d'un corps solide*, que cet illustre géomètre a lu à l'Académie des Sciences en 1834. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, tome XIV.)

a', b', c', ou par a'', b'', c'', et faisant dans chaque cas la somme, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = a(qz_1 - ry_1) + b(rx_1 - pz_1) + c(py_1 - qx_1) + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt};$$

$$\frac{dy}{dt} = a'(qz_1 - ry_1) + b'(rx_1 - pz_1) + c'(py_1 - qx_1) + a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = a''(qz_1 - ry_1) + b''(rx_1 - pz_1) + c''(py_1 - qx_1) + a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt}.$$

De là, en différentiant, on tirera les valeurs des trois composantes, suivant Ox, Oy, Oz, de la force accélératrice qui répond au mouvement du point m, je veux dire les valeurs des trois quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} = {} & a\left(z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt}\right) + b\left(x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt}\right) + c\left(y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt}\right) \\ & + (qz_1 - ry_1)\frac{da}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc}{dt} \\ & + a\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right) \\ & + a\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2y_1}{dt^2} + c\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dc}{dt}:\end{aligned}$$

les deux dernieres lignes proviennent de ce que x_1, y_1, z_1 varient en fonction du temps : aussi ne les trouve-t-on pas dans les formules de Poisson.

On a de même

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = {} & a'\left(z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt}\right) + b'\left(x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt}\right) + c'\left(y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt}\right) \\ & + (qz_1 - ry_1)\frac{da'}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db'}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc'}{dt} \\ & + a'\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b'\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c'\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right) \\ & + a'\frac{d^2x_1}{dt^2} + b'\frac{d^2y_1}{dt^2} + c'\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dc'}{dt},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} &= a''\left(z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt}\right) + b''\left(x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt}\right) + c''\left(y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt}\right)\\ &+ (qz_1 - ry_1)\frac{da''}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db''}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc''}{dt}\\ &+ a''\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b''\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c''\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right)\\ &+ a''\frac{d^2 x_1}{dt^2} + b''\frac{d^2 y_1}{dt^2} + c''\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dc''}{dt};\end{aligned}$$

équations dont les seconds membres se déduisent, au reste, du second membre de l'équation précédente, en accentuant une fois ou deux fois les lettres a, b, c.

Des composantes $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ de la force accélératrice qui répond au point m, estimées suivant les axes Ox, Oy, Oz, on conclut les composantes p_1, q_1, r_1 de cette même force parallèlement aux axes Ox_1, Oy_1. Oz_1, pris dans la position qu'ils occupent à l'époque actuelle t. On a, en effet,

$$\begin{aligned}p_1 &= a\frac{d^2 x}{dt^2} + a'\frac{d^2 y}{dt^2} + a''\frac{d^2 z}{dt^2},\\ q_1 &= b\frac{d^2 x}{dt^2} + b'\frac{d^2 y}{dt^2} + b''\frac{d^2 z}{dt^2},\\ r_1 &= c\frac{d^2 x}{dt^2} + c'\frac{d^2 y}{dt^2} + c''\frac{d^2 z}{dt^2}.\end{aligned}$$

La substitution des valeurs obtenues ci-dessus, pour

$$\frac{d^2 x}{dt^2},\quad \frac{d^2 y}{dt^2},\quad \frac{d^2 z}{dt^2},$$

nous donne, après réduction,

$$\begin{aligned}p_1 &= z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt} - (q^2 + r^2)x_1 + pqy_1 + prz_1\\ &\quad + 2q\frac{dz_1}{dt} - 2r\frac{dy_1}{dt} + \frac{d^2 x_1}{dt^2},\\ q_1 &= x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt} - (r^2 + p^2)y_1 + qrz_1 + pqx_1\\ &\quad + 2r\frac{dx_1}{dt} - 2p\frac{dz_1}{dt} + \frac{d^2 y_1}{dt^2},\end{aligned}$$

et

$$r_1 = y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt} - (p^2 + q^2) z_1 + prx_1 + qry_1 + 2p \frac{dy_1}{dt} - 2q \frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Nous pouvons maintenant poser, avec Poisson, les équations qui expriment l'égalité à zéro des sommes de moments des *forces perdues*, pris par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, dans la position que ces axes occupent à l'époque t.

Voici ces équations où l'on devra mettre pour p_1, q_1, r_1 leurs valeurs

$$\sum m(y_1 r_1 - z_1 q_1) = L_1,$$

$$\sum m(z_1 p_1 - x_1 r_1) = M_1,$$

$$\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = N_1;$$

on a représenté, pour abréger, par L_1, M_1, N_1 les sommes des moments des forces extérieures, par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, c'est-à-dire on a fait

$$\sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = L_1,$$

$$\sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) = M_1,$$

$$\sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = N_1,$$

mX_1, mY_1, mZ_1 étant les composantes de la force motrice appliquée au point m.

III.

Il ne nous reste plus qu'à développer les premiers membres des équations

$$\sum m(y_1 r_1 - z_1 q_1) = L_1,$$

$$\sum m(z_1 p_1 - x_1 r_1) = M_1,$$

$$\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = N_1,$$

en y mettant, comme nous le devons, au lieu de p_1, q_1, r_1 leurs valeurs.

Et d'abord nous trouvons que la différence

$$y_1 r_1 - z_1 q_1$$

est égale à

$$\begin{aligned}&(y_1^2 + z_1^2)\frac{dp}{dt} - x_1 y_1 \frac{dq}{dt} - x_1 z_1 \frac{dr}{dt} + y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\\ &+ (r^2 - q^2) y_1 z_1 + pr x_1 y_1 - pq x_1 z_1 + qr(y_1^2 - z_1^2)\\ &+ 2p\left(y_1 \frac{dy_1}{dt} + z_1 \frac{dz_1}{dt}\right) - 2q y_1 \frac{dx_1}{dt} - 2r z_1 \frac{dx_1}{dt}.\end{aligned}$$

Il faut multiplier ces divers termes par m, puis faire la somme $\sum$ relativement à tous les points m, m', m'',..., et enfin égaler à L_1 le résultat.

Posons

$$A = \sum m(y_1^2 + z_1^2), \quad B = \sum m(z_1^2 + x_1^2), \quad C = \sum m(x_1^2 + y_1^2),$$

et

$$D = \sum m y_1 z_1, \quad E = \sum m x_1 z_1, \quad F = \sum m x_1 y_1;$$

il s'ensuivra que

$$\sum m\left(y_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1 \frac{dy_1}{dt}\right) = \frac{dD}{dt}:$$

si donc on fait

$$\sum m\left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}\right) = \alpha,$$

on en conclura

$$\sum m y_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dD}{dt} + \alpha\right),$$

$$\sum m z_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dD}{dt} - \alpha\right).$$

En posant

$$\sum m\left(z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt}\right) = \beta, \quad \sum m\left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}\right) = \gamma,$$

on trouvera de même

$$\sum m z_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{dt} + \beta\right),$$
$$\sum m x_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{dt} - \beta\right),$$
$$\sum m x_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dt} + \gamma\right),$$
$$\sum m y_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dt} - \gamma\right).$$

Le résultat de la sommation indiquée plus haut pourra dès lors s'écrire assez simplement, et l'on obtiendra sans difficulté

$$L_1 = \frac{d}{dt}(Ap - Fq - Er + \alpha) + D(r^2 - q^2) + (C - B)qr + Fpr - Epq + q\gamma - r\beta.$$

Voilà sous sa forme définitive une de nos trois équations, et les deux autres s'en déduisent par de simples changements de lettres; ce sont :

$$M_1 = \frac{d}{dt}(Bq - Dr - Fp + \beta) + E(p^2 - r^2) + (A - C)pr + Dpq - Fqr + r\alpha - p\gamma$$

et

$$N_1 = \frac{d}{dt}(Cr - Ep - Dq + \gamma) + F(q^2 - p^2) + (B - A)pq + Eqr - Dpr + p\beta - q\alpha.$$

Nos équations se simplifient beaucoup quand on choisit les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 de manière à avoir toujours

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

en sorte que les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 soient à chaque instant, pour le point O, les trois axes principaux d'inertie du système variable m, m', m'', ...; on le peut, car la condition de rectangularité que nous avons imposée seule aux trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 est remplie, comme on sait, par les trois axes principaux d'inertie d'un corps relativement à un point quelconque.

Il nous vient alors

$$\frac{d.(Ap+\alpha)}{dt}+(C-B)qr+q\gamma-r\beta=L_1,$$
$$\frac{d.(Bq+\beta)}{dt}+(A-C)pr+r\alpha-p\gamma=M_1,$$
$$\frac{d.(Cr+\gamma)}{dt}+(B-A)pq+p\beta-q\alpha=N_1.$$

Ces équations si simples trouveront, je crois, de nombreuses applications.

En les multipliant respectivement par a, b, c, puis ajoutant, et se rappelant que, d'après un théorème d'Euler sur les *moments* des forces,

$$aL_1+bM_1+cN_1=L.$$

on en déduit

$$L=a\frac{d.(Ap+\alpha)}{dt}+b\frac{d.(Bq+\beta)}{dt}+c\frac{d.(Cr+\gamma)}{dt}$$
$$+(Ap+\alpha)(br-cq)+(Bq+\beta)(cp-ar)+(Cr+\gamma)(aq-bp).$$

Observant ensuite que

$$br-cq=\frac{da}{dt},\quad cp-ar=\frac{db}{dt},\quad aq-bp=\frac{dc}{dt},$$

on en conclura

$$L=\frac{d}{dt}[a(Ap+\alpha)+b(Bq+\beta)+c(Cr+\gamma)].$$

De même

$$M=\frac{d}{dt}[a'(Ap+\alpha)+b'(Bq+\beta)+c'(Cr+\gamma)],$$

et

$$N=\frac{d}{dt}[a''(Ap+\alpha)+b''(Bq+\beta)+c''(Cr+\gamma)].$$

Si, au lieu d'opérer sur les formules simplifiées, on avait opéré sur

les formules générales, le résultat, que je présente sous une formule plus simple en effectuant une intégration par rapport à t, dont L, M, N sont des fonctions au moins implicites, aurait été

$$\begin{aligned}\int \mathrm{L}\,dt = a\,(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ + b\,(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ + c\,(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{M}\,dt = a'(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha),\\ + b'(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ + c'(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{N}\,dt = a''(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha)\\ + b''(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta)\\ + c''(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma).\end{aligned}$$

En différentiant et remplaçant les dérivées de a, b,..., par leurs valeurs $\frac{da}{dt} = br - cq, \ldots$, multipliant les équations ainsi obtenues par a, a', a'' et faisant la somme, puis répétant le même calcul avec les multiplicateurs b, b', b'', ou c, c', c'', enfin se rappelant que

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_1 &= a\mathrm{L} + a'\mathrm{M} + a''\mathrm{N},\\ \mathrm{M}_1 &= b\mathrm{L} + b'\mathrm{M} + b''\mathrm{N},\\ \mathrm{N}_1 &= c\mathrm{L} + c'\mathrm{M} + c''\mathrm{N},\end{aligned}$$

on retrouverait les valeurs de L_1, M_1, N_1 dont nous sommes partis; en sorte que si les dernières équations étaient établies directement, les autres s'en déduiraient avec facilité. Cette marche est celle de Poisson pour le problème de la rotation des corps dans le XV[e] Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique.* J'y reviendrai tout à l'heure, et l'on verra qu'elle est fort simple. Je me borne actuellement à faire observer que si les sommes de moments L, M, N sont nulles, leurs intégrales seront de simples constantes l, l', l'', d'où il suit que l'on aura ces trois

intégrales

$$\begin{aligned} l = a\,(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) \\ + b\,(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) \\ + c\,(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l' = a'(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) \\ + b'(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) \\ + c'(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l'' = a''(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) \\ + b''(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) \\ + c''(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma). \end{aligned}$$

Ce sont les intégrales que devait naturellement fournir ici le principe de la *conservation des aires*. On peut encore les mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha = al + a'l' + a''l'', \\ \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta = bl + b'l' + b''l''. \\ \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma = cl + c'l' + c''l''. \end{aligned}$$

Les trois constantes l, l', l'' se rapportent aux aires décrites sur les plans respectifs des yz, des xz et des xy. Si l'on pose

$$k = \sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2},$$

k exprimera l'aire *maxima*, qui répond, comme on sait, à un certain plan, fixe aussi et facile à déterminer, que Laplace a nommé le *plan invariable*. Rien n'empêche de prendre ce plan invariable pour plan des xy : alors on aura

$$l = 0, \quad l' = 0, \quad l'' = k;$$

et nos trois intégrales se réduiront à

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha = a''k, \\ \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta = b''k, \\ \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma = c''k. \end{aligned}$$

En exprimant les cosinus a'', b'', c'' au moyen des trois angles θ, φ, ψ dont il a été question précédemment, et dont Poisson s'est servi à

l'imitation d'Euler, nos dernières formules deviennent

$$\sin\theta \sin\varphi = -\frac{1}{k}(Ap - Fq - Er + \alpha),$$

$$\sin\theta \cos\varphi = -\frac{1}{k}(Bq - Dr - Fp + \beta),$$

$$\cos\theta = \frac{1}{k}(Cr - Ep - Dq + \gamma).$$

Elles se simplifient beaucoup quand on a

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

et plus encore si l'on a, en outre,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

ce qui arrivera dans un problème dont nous nous occuperons plus tard. Elles se réduisent alors à

$$\sin\theta \sin\varphi = -\frac{Ap}{k}, \quad \sin\theta \cos\varphi = -\frac{Bq}{k}, \quad \cos\theta = \frac{Cr}{k};$$

et ressemblent par conséquent à celles qu'on trouverait pour un système de forme invariable : seulement ici A, B, C ne sont pas des constantes.

IV.

Appliquons maintenant à l'objet de nos recherches la méthode suivie par Poisson dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique*. Cette méthode prend son point de départ dans les équations

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \int L\,dt,$$

$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \int M\,dt,$$

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \int N\,dt,$$

qui ne sont que du premier ordre, et dont la transformation n'exige

par cela même que des calculs moins longs, ce qui compense l'inconvénient qu'elles ont de ne pas conduire tout d'abord aux équations séparées entre p, q, r et t.

Au moyen des formules

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1,$$

et de celles-ci qu'on en déduit, comme nous l'avons vu,

$$\frac{dx}{dt} = a(qz_1 - ry_1) + b(rx_1 - pz_1) + c(py_1 - qx_1) + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = a'(qz_1 - ry_1) + b'(rx_1 - pz_1) + c'(py_1 - qx_1) + a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = a''(qz_1 - ry_1) + b''(rx_1 - pz_1) + c''(py_1 - qx_1) + a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt},$$

on formera les valeurs des trois expressions

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt};$$

celle, par exemple, de

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$$

sera

$$\begin{aligned}&(bc' - cb')\left(py_1^2 - qx_1y_1 - rx_1z_1 + pz_1^2 + y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right)\\ &+ (ca' - ac')\left(qz_1^2 - ry_1z_1 - px_1y_1 + qx_1^2 + z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right)\\ &+ (ab' - ba')\left(rx_1^2 - px_1z_1 - qy_1z_1 + ry_1^2 + x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right).\end{aligned}$$

Mais on a

$$bc' - cb' = a'', \quad ca' - ac' = b'', \quad ab' - ba' = c'';$$

elle deviendra donc

$$\begin{aligned} &a''\left[p(y_1^2+z_1^2)-qx_1y_1-rx_1z_1+y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right]\\ &+b''\left[q(z_1^2+x_1^2)-ry_1z_1-px_1y_1+z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right]\\ &+c''\left[r(x_1^2+y_1^2)-px_1z_1-qy_1z_1+x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right]. \end{aligned}$$

En la multipliant par m, et sommant pour toutes les molécules m, m', m'',..., pour lesquelles les cosinus a'', b'', c'' ne changent pas, on en conclura la valeur de

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

qu'il faudra égaler à

$$\int \mathrm{N}\,dt.$$

En posant, comme plus haut,

$$\mathrm{A}=\sum m(y_1^2+z_1^2),\quad \mathrm{B}=\sum m(z_1^2+x_1^2),\quad \mathrm{C}=\sum m(x_1^2+y_1^2),$$

$$\mathrm{D}=\sum my_1z_1,\quad \mathrm{E}=\sum mx_1z_1,\quad \mathrm{F}=\sum mx_1y_1,$$

et

$$\begin{aligned} \alpha&=\sum m\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right),\\ \beta&=\sum m\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right),\\ \gamma&=\sum m\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right), \end{aligned}$$

la valeur définitive de

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

se trouve être

$$\begin{aligned} &a''(\mathrm{A}p-\mathrm{F}q-\mathrm{E}r+\alpha)\\ &+b''(\mathrm{B}q-\mathrm{D}r-\mathrm{F}p+\beta)\\ &+c''(\mathrm{C}r-\mathrm{E}p-\mathrm{D}q+\gamma). \end{aligned}$$

Ainsi l'on a

$$\int \mathrm{N}\,dt = a''(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) + b''(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) + c''(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma),$$

et de même

$$\int \mathrm{M}\,dt = a'(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) + b'(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) + c'(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q - \gamma),$$

$$\int \mathrm{L}\,dt = a(\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + \alpha) + b(\mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p + \beta) + c(\mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \gamma).$$

Ce sont les équations que nous avions obtenues en dernier lieu dans le paragraphe précédent, et à leur tour elles peuvent mener aux équations différentielles entre p, q, r, t, débarrassées des cosinus a, b, c,.... Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit plus haut sur ce sujet.

V.

Pour donner une application simple de nos formules, considérons un corps solide de forme entièrement symétrique par rapport à trois plans rectangulaires $y_1 O z_1$, $z_1 O x_1$, $x_1 O y_1$, comme l'est, par exemple, un ellipsoïde, mais comme peuvent l'être une infinité d'autres corps : supposons la matière, homogène ou non, qui le compose, répartie symétriquement aussi, de sorte que la densité soit la même pour les huit éléments que l'on peut concevoir aux huit points dont les coordonnées ont les mêmes valeurs absolues (x_1, y_1, z_1); admettons enfin que la température soit la même, non pas en tous les points, mais pour chaque groupe de huit points défini par la formule

$$(\pm x_1,\ \pm y_1,\ \pm z_1),$$

cette température pouvant d'ailleurs varier avec le temps sous une

influence qui n'altère pas l'égalité indiquée. Le point O sera d'abord et restera toujours le centre de gravité du corps, et les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 seront d'abord et resteront toujours aussi des axes principaux d'inertie, de manière qu'en les prenant pour ceux de nos formules, on aura

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

Quant aux moments d'inertie A, B, C, ils varieront avec le temps, puisque la forme du corps change par suite des changements de température. Si donc on suppose le corps mis en mouvement d'une manière quelconque et abandonné ensuite à lui-même, son mouvement de rotation ne pourra pas être déterminé par les formules ordinaires qui supposent à A, B, C des valeurs constantes; mais il pourra l'être par nos formules, où l'on devra faire non-seulement

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

mais encore

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

puisque, d'après les conditions de symétrie admises plus haut, les sommes des quantités $mx_1 \frac{dy_1}{dt}, \ldots$, faites pour les masses égales m aux huit points du groupe $(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ ne peuvent manquer d'être nulles, comme les sommes des produits $mx_1 y_1$, $mx_1 z_1, \ldots$. Cela réduira nos équations différentielles entre p, q, r et t à celles-ci :

$$\frac{d.\mathrm{A}p}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})qr = 0,$$

$$\frac{d.\mathrm{B}q}{dt} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})pr = 0,$$

$$\frac{d.\mathrm{C}r}{dt} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})pq = 0,$$

et permettra (en prenant pour plan des xy le plan du maximum des aires) de se servir des intégrales écrites à la fin du § III, savoir :

$$\sin\theta \sin\varphi = -\frac{\mathrm{A}p}{k}, \quad \sin\theta \cos\varphi = -\frac{\mathrm{B}q}{k}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{k},$$

dont la somme des carrés donne

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2.$$

Voilà une première intégrale des équations différentielles entre p, q, r et t. Si l'on en trouvait deux autres, p, q, r seraient exprimés en fonction du temps, par suite aussi θ et φ, et enfin ψ, au moyen de la formule

$$r\,dt = d\varphi - \cos\theta\, d\psi.$$

Les angles θ, φ, ψ déterminent à chaque instant la position des axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, par rapport auxquels on se représentera aisément la situation des diverses parties du corps lui-même, dont le mouvement relativement à ces axes est fourni par la loi supposée connue des variations de température. Dans les hypotheses que nous avons faites, les points placés d'abord sur les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 ne peuvent que glisser le long de ces axes: les autres points peuvent avoir des mouvements relatifs plus compliqués; mais ces mouvements, qui ne dépendent que de la loi de variation de la température et de la nature du corps, n'influent sur nos formules qu'autant qu'ils rendent variables, suivant une loi que nous supposons donnée, les moments d'inertie A, B, C. Ainsi, dans nos équations différentielles,

$$\frac{d.Ap}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$\frac{d.Bq}{dt} + (A - C)pr = 0,$$

$$\frac{d.Cr}{dt} + (B - A)pq = 0,$$

A, B, C désignent des fonctions connues du temps.

L'intégrale

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

qui n'a été obtenue que par un moyen peu direct, se déduit facilement de ces équations différentielles en les multipliant par les facteurs respectifs Ap, Bq, Cr et faisant la somme, qui se trouve être une différentielle exacte.

On aura sur-le-champ une seconde intégrale, si deux des moments d'inertie sont constamment égaux entre eux, si par exemple on a $B = A$, ce qui arrivera pour un corps semblable à lui-même tout autour de l'axe Oz_1.

Alors

$$\frac{d.Cr}{dt} = 0,$$

par suite

$$Cr = \text{const.} = C_0 r_0,$$

l'indice o marquant la valeur pour $t = 0$.

Ainsi

$$r = \frac{C_0 r_0}{C}$$

et

$$\cos\theta = \frac{Cr}{k} = \frac{C_0 r_0}{k} = \text{const.}$$

L'angle θ est donc constant. En le traitant comme tel dans la formule

$$Ap = -k\sin\theta\sin\varphi,$$

on en conclut

$$\frac{d.Ap}{dt} = -k\sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

et cette valeur portée, ainsi que celles de q et de r, savoir :

$$q = -\frac{k\sin\theta\cos\varphi}{B}, \qquad r = \frac{k\cos\theta}{C},$$

dans la formule

$$\frac{d.Ap}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

où, du reste, on doit faire $B = A$, donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = -k\cos\theta\frac{C - A}{AC};$$

d'où

$$\varphi = \varphi_0 - k\cos\theta\int_0^t \frac{C - A}{AC}dt.$$

Enfin la formule

$$r\,dt = d\varphi - \cos\theta\, d\psi$$

donne

$$\psi = \psi_0 - k\int_0^t \frac{dt}{A},$$

et achève la solution du problème.

Les équations

$$\frac{d.Ap}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$\frac{d.Bq}{dt} + (A - C)pr = 0,$$

$$\frac{d.Cr}{dt} + (B - A)pq = 0,$$

peuvent encore être intégrées rigoureusement, si les quantités A, B, C, d'ailleurs inégales entre elles, varient suivant la même loi d'une époque à une autre, c'est-à-dire si les valeurs initiales A_0, B_0, C_0 se trouvent altérées proportionnellement au bout du temps quelconque t, de manière que

$$A = A_0 f(t), \qquad B = B_0 f(t), \qquad C = C_0 f(t),$$

la fonction $f(t)$ étant partout la même. En effet, si l'on pose alors

$$pf(t) = u, \qquad qf(t) = v, \qquad rf(t) = w,$$

et

$$\int_0^t \frac{dt}{f(t)} = \tau,$$

nos équations deviendront

$$A_0\frac{du}{d\tau} + (C_0 - B_0)vw = 0,$$

$$B_0\frac{dv}{d\tau} + (A_0 - C_0)uw = 0,$$

$$C_0\frac{dw}{d\tau} + (B_0 - A_0)uv = 0;$$

elles seront donc entièrement semblables à celles du mouvement de

rotation d'un système de forme invariable et s'intégreront comme elles. On aura d'abord ces deux intégrales

$$A_0 u^2 + B_0 v^2 + C_0 w^2 = \text{const.},$$

et

$$A_0^2 u^2 + B_0^2 v^2 + C_0^2 w^2 = \text{const.},$$

qui donneront u et v en fonction de w, après quoi τ s'exprimera aussi en fonction de w par une quadrature.

SUR

QUELQUES FORMULES RELATIVES A LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. HERMITE.

L'expression générale des quatre fonctions θ sur lesquelles repose la théorie des fonctions elliptiques est, comme on sait, la suivante :

$$(A) \qquad \theta_{\mu,\nu}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\nu} e^{i\pi\left[(2m+\mu)x+\frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2\right]},$$

μ et ν étant zéro ou l'unité et ω une constante imaginaire telle, qu'en faisant

$$\omega = \omega_0 + i\omega_1$$

on ait ω_1 essentiellement différent de zéro et positif. Ces quatre fonctions sont définies, à un facteur constant près, par les équations

$$\theta_{\mu,\nu}(x+1) = (-1)^{\mu}\,\theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu,\nu}(x+\omega) = (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(x).e^{-i\pi(2x+\omega)},$$

et elles jouissent des propriétés exprimées par les relations suivantes :

$$\theta_{\mu,\nu}(-x) = (-1)^{\mu\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu+2,\nu}(x) = (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu,\nu+2}(x) = \theta_{\mu,\nu}(x),$$
$$\theta_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(x) = \theta_{\mu',\nu'}\left(x+\frac{\mu\omega+\nu}{2}\right)e^{i\pi\left(\mu x+\frac{\mu^2\omega}{4}-\frac{\nu\mu'}{2}\right)}.$$

La première de ces relations montre que des quatre fonctions θ une seule est impaire, celle qui correspond aux valeurs $\mu=1$, $\nu=1$; les deux suivantes montrent comment la formule (A), quels que soient les

entiers μ et ν, ne donne effectivement que quatre fonctions distinctes; enfin la dernière permet d'exprimer ces fonctions par une seule d'entre elles. A ces relations nous joindrons enfin, bien que nous n'ayons pas à l'employer ici, la suivante, qui fournit les équations algébriques ou différentielles auxquelles satisfont nos fonctions, et où je suppose

$$\mu - \mu' = \alpha, \qquad \nu - \nu' = \beta,$$

savoir :

$$\begin{aligned}
&2\theta_{\mu,\nu}(x+y)\,\theta_{\mu',\nu'}(x-y)\,\theta_{\alpha,0}(0)\,\theta_{0,\beta}(0)\\
&= \theta_{\mu,\nu}(x)\,\theta_{\mu',\nu'}(x)\,\theta_{\alpha,0}(y)\,\theta_{0,\beta}(y)\\
&+ (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu+1,\nu}(x)\,\theta_{\mu'+1,\nu'}(x)\,\theta_{\alpha+1,0}(y)\,\theta_{1,\beta}(y)\\
&+ (-1)^{\nu}\,\theta_{\mu+1,\nu+1}(x)\,\theta_{\mu'+1,\nu'+1}(x)\,\theta_{\alpha+1,1}(y)\,\theta_{1,\beta+1}(y)\\
&+ \theta_{\mu,\nu+1}(x)\,\theta_{\mu',\nu'+1}(x)\,\theta_{\alpha,1}(y)\,\theta_{0,\beta+1}(y).
\end{aligned}$$

Cela posé, soient a, b, c, d des entiers tels, que $ad - bc = k$, k étant essentiellement différent de zéro et positif, faisons

$$\Omega = \frac{c + d\omega}{a + b\omega},$$

$$\mathfrak{m} = a\mu + b\nu + ab,$$

$$\mathfrak{n} = c\mu + d\nu + cd,$$

$$\Pi(x) = \theta_{\mu,\nu}[(a + b\omega)x]\,e^{i\pi b(a+b\omega)x^2},$$

on aura les relations fondamentales

$$\Pi(x+1) = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x),$$

$$\Pi(x+\Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(x)\,e^{-ki\pi(2x+\Omega)},$$

qui servent à exprimer $\Pi(x)$, quels que soient μ et ν, au moyen des quatre fonctions analogues à θ, mais relatives au module Ω, et que nous représenterons par

$$\Theta_{\mu,\nu}(x).$$

A cet effet, je désigne par T_i une fonction homogène du degré i

des carrés de deux des fonctions Θ; cela étant, on aura pour k impair cette expression très-simple

$$\Pi(x) = \Theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(x) \cdot T_{\frac{k-1}{2}}.$$

Laissant ici de côté la détermination de ces fonctions désignées par $T_{\frac{k-1}{2}}$, je vais seulement, dans le cas de $k=1$, où T est une simple constante, en donner la valeur, qui exige une analyse assez délicate.

Supposons le nombre b positif, comme on le peut toujours, car s'il en était autrement on chercherait la formule de transformation relative au système des nombres $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, ainsi qu'on y est autorisé par la nature de la condition $ad - bc = 1$, qui n'est pas altérée par ce changement, et cette formule trouvée, on en déduirait immédiatement celle qu'il s'agissait primitivement d'obtenir, la constante T restant la même ou changeant seulement de signe, comme il est aisé de le reconnaître par le changement dont nous parlons. Cela étant, on aura

$$T = \frac{\delta \sum_{0}^{b-1} {}_{\rho}\, e^{-i\pi \frac{a\left(\rho - \frac{1}{2}b\right)^2}{b}}}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}},$$

δ étant une racine huitième de l'unité dont voici la détermination :

$$\delta = e^{-\frac{1}{4}i\pi(ac\mu^2 + 2bc\mu\nu + bd\nu^2 + 2abc\mu + 2abd\nu + ab^2c)},$$

et le signe du radical carré $\sqrt{-ib(a+b\omega)}$ étant pris de manière que la partie réelle de ce radical soit positive [*].

---

[*] Pour $b=0$, la formule de transformation se réduit à l'équation suivante :

$$\theta_{\mu,\nu}(x,\omega) = e^{-\frac{i\pi}{4}\alpha\mu^2}\,\theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(x, \omega+\alpha),$$

α étant un nombre entier arbitraire, $\mathfrak{m}$ étant egal à μ et $\mathfrak{n}$ à $\alpha(\mu+1)+\nu$.

Des cas particuliers de cette relation ont été déjà donnés par Jacobi dans un Mémoire sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \ldots, \qquad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots$$

(*Journal* de M. Crelle, tome XXXIV, et *Journal* de M. Liouville, traduction de M. Puiseux). Mais l'illustre auteur, laissant de côté la détermination de δ, se borne à annoncer que le signe de la constante dépend de la quantité désignée par le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ dans la théorie des résidus quadratiques. Ce fait si remarquable résulte, en effet, des propriétés de la série

$$\sigma = \sum_{0}^{b-1}{}_{\rho}\, e^{-i\pi\frac{a\left(\rho-\frac{1}{2}b\right)^2}{b}},$$

qui se trouve comme facteur dans la valeur de T. Soit d'abord

$$b = 2^{\alpha}\beta,$$

β étant impair, on aura

$$e^{\frac{i\pi}{4}\left[1+\frac{3(a\beta+1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{-a}{\beta}\right)\sqrt{b}.$$

si α est pair, et

$$e^{\frac{i\pi}{4}\left[1+\frac{3(a\beta+1)^2+(\beta-1)^2+a^2-1}{2}\right]}\left(\frac{-a}{\beta}\right)\sqrt{b},$$

lorsque α est impair.

En second lieu, supposons b impair; alors on pourra déterminer deux nombres entiers m et n par l'équation

$$a = mb - 8n,$$

et l'on aura

$$\sigma = e^{-\frac{mi\pi}{4}}\cdot\left(\frac{n}{b}\right) i^{\left(\frac{b-1}{2}\right)^2}\sqrt{b}.$$

Ces résultats [*] se déduisent des formules données par Gauss dans le célèbre Mémoire intitulé : *Summatio serierum quarumdam singularium;* seulement j'ai fait usage, pour éviter autant que possible une énumération de cas, de la forme sous laquelle elles ont été présentées par M. Lebesgue dans un Mémoire intitulé : *Sur le symbole* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *et sur quelques-unes de ses applications*. Je remarque enfin que l'introduction des nombres μ et ν d'une part, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ de l'autre, permet de résumer dans une seule équation, savoir :

$$\Pi(x) = \theta_{\mu,\nu}[(a+b\omega)x, \omega]\, e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = \mathrm{T}\theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\left(x, \frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right);$$

ce que Jacobi nomme la théorie des formes en nombre infini des fonctions θ, théorie sur laquelle il avait annoncé un travail important que la mort l'a empêché de publier.

Pour établir les formules précédentes, je m'occuperai d'abord des deux égalités

$$\Pi(x+1) = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x),$$
$$\Pi(x+\Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(x)\,e^{-ki\pi(2x+\Omega)},$$

dans lesquelles, ainsi que je l'ai dit plus haut, on a

$$\mathfrak{m} = a\mu + b\nu + ab,$$
$$\mathfrak{n} = c\mu + d\nu + cd,$$
$$\Omega = \frac{c+d\omega}{a+b\omega}.$$

[*] Peut-être n'est-il pas inutile d'observer que l'imaginaire i, qui figure dans la série σ ou dans l'expression de cette série par les symboles de la théorie des résidus quadratiques, est absolument la même quantité qui entre dans la définition des fonctions θ par l'équation (A). Je ferai enfin remarquer que σ se présente toujours, comme le produit de $\sqrt{b}$, par une racine huitième de l'unité; de sorte qu'en résumé la constante T a cette valeur :

$$\mathrm{T} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a+b\omega}} \quad \text{ou} \quad \varepsilon^8 = 1.$$

et

$$k = ad - bc.$$

Pour cela, j'observe qu'on peut écrire

$$\Pi(x) = \theta_{\mu,\nu}[(a + b\omega)x]e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = \sum_{m}^{+\infty}_{-\infty} e^{i\pi\varphi(x,m)},$$

en posant

$$\varphi(x, m) = b(a + b\omega)x^2 + (2m + \mu)(a + b\omega)x + \frac{\omega}{4}(2m + \mu)^2 - m\nu.$$

Or cette fonction jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :

$$\varphi(x - 1, m) - \varphi(x, m + b) = 2am + \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} \pmod{2},$$

qu'on vérifie par un calcul très-facile, et il en résulte qu'on peut écrire

$$\Pi(x + 1) = \sum_{m}^{+\infty}_{-\infty} e^{i\pi\varphi(x+1,m)} = (-1)^{\mathfrak{m}} \sum_{m}^{+\infty}_{-\infty} e^{i\pi\varphi(x,m+b)},$$

et par suite

$$\Pi(x + 1) = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(x),$$

car le nombre m devant prendre toutes les valeurs, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on peut, sans altérer la somme $\sum$, changer m en $m + b$ dans la fonction $\varphi(x, m)$.

Soit ensuite, pour un moment,

$$\Pi_0(x) = e^{i\pi k\Omega x^2}\,\Pi(\Omega x) = \sum_{m}^{+\infty}_{-\infty} e^{i\pi\varphi_0(x,m)},$$

il est clair que la nouvelle fonction $\varphi_0(x, m)$ sera liée à celle dont nous venons de parler par l'égalité

$$\varphi_0(x, m) = k\Omega x^2 + \varphi(\Omega x, m).$$

Or en recourant à la valeur de Ω et réduisant les deux termes en x^2,

on obtiendra immédiatement

$$\varphi_0(x, m) = d(c + d\omega)x^2 + (2m + \mu)(c + d\omega)x + \frac{\omega}{4}(2m+\mu)^2 - m\nu,$$

de sorte qu'on peut passer de la fonction $\varphi(x, m)$ à la fonction $\varphi_0(x, m)$ par le simple changement de a et b en c et d. On a donc la relation

$$\varphi_0(x + 1, m) - \varphi_0(x, m + d) = 2cm + \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n} \pmod{2},$$

et par suite celle-ci :

$$\Pi_0(x + 1) = (-1)^{\mathfrak{n}}\, \Pi_0(x).$$

On en déduit qu'on a, relativement à la fonction $\Pi(x)$,

$$e^{i\pi k\Omega(x+1)^2}\, \Pi(\Omega x + \Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\, e^{i\pi k\Omega x^2}\, \Pi(x),$$

d'où, après avoir dans les deux membres supprimé le facteur $e^{i\pi k\Omega x^2}$ et remplacé Ωx par x,

$$\Pi(x + \Omega) = (-1)^{\mathfrak{n}}\, \Pi(x)\, e^{-ki\pi(2x+\Omega)}.$$

Ces deux égalités démontrées, voici maintenant comment on parvient, dans le cas où l'on suppose $k = 1$, à la détermination de la constante T dans l'équation

$$\theta_{\mu,\nu}[(a + b\omega)x, \omega]\, e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = \mathrm{T}\,\theta_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\left(x, \frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right).$$

Remplaçant d'abord les fonctions par leurs développements et mettant pour cela dans le second membre Ω au lieu de $\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$, on aura

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, e^{i\pi\varphi(x, m)} = \mathrm{T} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, (-1)^{m\mathfrak{n}}\, e^{i\pi\left[(2m+\mathfrak{m})x + \frac{\Omega}{4}(2m+\mathfrak{m})^2\right]}.$$

Cela posé, nous introduirons au lieu de $\varphi(x, m)$ l'expression

$$\psi(x, m) = \varphi(x, m) - \mathfrak{m}x,$$

ce qui permettra de supprimer dans les deux membres de l'équation

précédente le facteur $e^{\mathfrak{m} i \pi x}$, de manière à avoir

$$\sum_{m}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,m)} = \mathrm{T}\sum_{m}^{+\infty}{}_{-\infty}(-1)^{m\mathfrak{n}} e^{i\pi\left[2mx + \frac{\Omega}{4}(2m+\mathfrak{m})^2\right]}.$$

On en conclura par suite, en intégrant entre les limites zéro et l'unité,

$$\int_0^1 \sum_{m}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,m)}\,dx = \mathrm{T}\, e^{i\pi\mathfrak{m}^2\frac{\Omega}{4}},$$

et il s'agira maintenant d'obtenir l'intégrale définie du premier membre.

A cet effet, j'observe que la fonction $\psi(x, m)$ donne lieu à cette relation :

$$\psi(x+1, m) \equiv \psi(x, m+b) \quad \text{mod. } 2,$$

ou plus généralement

$$\psi(x+n, m) \equiv \psi(x, m+nb) \text{ mod. } 2,$$

n désignant un entier arbitraire. Supposons donc, comme il a été admis précédemment, que b soit différent de zéro et positif, et décomposons la série des nombres entiers m en b progressions arithmétiques dont la raison soit b, on aura

$$\begin{aligned}\sum_{m}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,m)} = & \sum_{n}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,nb)} \\ & + \sum_{n}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,nb+1)} \\ & + \sum_{n}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,nb+2)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sum_{n}^{+\infty}{}_{-\infty} e^{i\pi\psi(x,nb+b-1)}.\end{aligned}$$

Or, en vertu de la propriété de la fonction $\psi(x, m)$, cette relation pourra encore s'écrire :

$$\sum_{m}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x,m)} = \sum_{n}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x+n,0)}$$

$$+ \sum_{n}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x+n,1)}$$

$$+ \sum_{n}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x+n,2)}$$

. . . .

$$+ \sum_{n}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x+n,b-1)}.$$

Ainsi l'intégrale définie cherchée

$$\int_0^1 \sum_{m}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x,m)}\,dx,$$

se trouve exprimée par la somme d'un nombre b d'intégrales telles que

$$\int_0^1 \sum_{n}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x+n,\rho)}\,dx,$$

ρ formant la suite des valeurs 0, 1, 2,..., $b-1$. Maintenant, en vertu d'une transformation bien connue de ces sortes d'expressions, on a simplement

$$\int_0^1 \sum_{n}^{-\infty, +\infty} e^{i\pi\psi(x+n,\rho)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\psi(x,\rho)}\,dx,$$

de sorte que l'on parvient pour la détermination de T à cette relation

$$\mathrm{T}e^{i\pi\frac{\Omega}{4}\mathfrak{m}^2} = \sum_{\rho}^{0, b-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\psi(x,\rho)}\,dx.$$

Les intégrales qui y figurent s'obtiennent par la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(px^2+qx+r)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-ip}}\,e^{i\pi\frac{4pr-q^2}{4p}},$$

où le radical carré $\sqrt{-ip}$ est pris de manière que la partie réelle soit positive. Ce résultat est dû, comme on sait, à M. Cauchy, et a été donné par l'illustre géomètre dans les anciens *Exercices mathématiques*. On en conclut par un calcul très-facile la valeur de la constante T, qui se présente d'abord sous cette forme :

$$\mathrm{T} = \frac{\delta \sum e^{-i\pi\frac{a\left(\rho-\frac{1}{2}b\right)^2}{b}}}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}},$$

δ ayant pour valeur

$$e^{-\frac{i\pi}{4b}(a\mu^2-2\mu\mathfrak{m}+d\mathfrak{m}^2-ab^2)}.$$

Pour prouver ensuite que δ est une racine huitième de l'unité, il faut remplacer $\mathfrak{m}$ par sa valeur

$$a\mu+b\nu+ab,$$

et l'on parvient ainsi, en faisant usage de l'équation

$$ad-bc=1,$$

à l'expression

$$\delta = e^{-\frac{i\pi}{4}(ac\mu^2+2bc\mu\nu+bd\nu^2+2abc\mu+2abd\nu+ab^2c)}.$$

Quant à la réduction aux symboles de la théorie des résidus quadratiques par les formules de Gauss de la somme

$$\sum_0^{b-1}{}_{\rho}\, e^{-i\pi\frac{a\left(\rho-\frac{1}{2}b\right)^2}{b}}$$

je pense qu'il suffit d'avoir donné les résultats du calcul sans rapporter le calcul lui-même qui est sans difficulté, et je terminerai cette Note en donnant les formules pour l'expression des fonctions $\Pi(x)$ par les fonctions $\Theta_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}(x)$ au module Ω lorsque le nombre $k = ad - bc$ est pair.

Pour cela je distinguerai deux cas :

$$1^{o}. \qquad (\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}+1) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Alors, pour $\mu\nu \equiv 0 \pmod{2}$, on a

$$\Pi(x) = T_{\frac{k}{2}},$$

et pour $\mu\nu \equiv 1 \pmod{2}$,

$$\Pi(x) = \Theta_{0,0}(x)\,\Theta_{0,1}(x)\,\Theta_{1,0}(x)\,\Theta_{1,1}(x)\,T_{\frac{k-4}{2}},$$

$$2^{o}. \qquad (\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{n}+1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

En supposant encore $\mu\nu \equiv 0 \pmod{2}$, on aura

$$\Pi(x) = \Theta_{\mathfrak{m},0}(x)\,\Theta_{0,\mathfrak{n}}(x)\,T_{\frac{k-2}{2}},$$

et pour $\mu\nu \equiv 1 \pmod{2}$,

$$\Pi(x) = \Theta_{1,1}(x)\,\Theta_{\mathfrak{m}+1,\,\mathfrak{n}+1}(x)\,T_{\frac{k-2}{2}}.$$

T_i, comme il a été dit précédemment, désigne une fonction de degré i des carrés de deux des fonctions Θ. Je me réserve de revenir dans une autre occasion sur ces formules pour la transformation des fonctions elliptiques, qui représentent pour un ordre donné une classe de transformations qu'il importe de considérer d'une manière particulière dans l'ensemble de toutes les transformations possibles.

SUR

LA THÉORIE DES FORMES CUBIQUES A TROIS INDÉTERMINÉES ;

PAR M. HERMITE.

L'étude des fonctions homogenes du troisième degré et à trois indéterminées conduit à considérer avec une forme donnée de cette espèce deux systèmes différents de fonctions qui s'en déduisent, et dont je rappellerai en premier lieu les expressions. Soit pour cela U la transformée canonique de la forme proposée, de sorte que l'on ait

$$U = x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz;$$

le premier de ces systèmes sera celui des invariants et du covariant cubique, savoir :

$$S = -l + l^4,$$
$$T = 1 - 20l^3 - 8l^6,$$
$$HU = l^2(x^3 + y^3 + z^3) - (1 + 2l^3)xyz.$$

Le second système sera formé des deux contre-variants ou formes cubiques adjointes, savoir :

$$PU = -l(x^3 + y^3 + z^3) + (-1 + 4l^3)xyz,$$
$$QU = (1 - 10l^3)(x^3 + y^3 + z^3) - 6l^2(5 + 4l^3)xyz.$$

J'omets à dessein les covariants et formes adjointes d'un degré supérieur au troisième, n'ayant pas à m'en occuper ici, et j'observe seulement que les combinaisons linéaires

$$\alpha U + 6\beta HU,$$
$$6\alpha PU + \beta QU,$$

où α et β sont des constantes indéterminées, représentent encore, la

première un covariant et la seconde une forme adjointe de U. On en peut conclure que les invariants du quatrième et du sixième ordre de ces deux fonctions, que nous désignerons avec M. Cayley de cette manière :

$$S(\alpha U + 6\beta HU), \qquad T(\alpha U + 6\beta HU),$$
$$S(6\alpha PU + \beta QU), \qquad T(6\alpha PU + \beta QU),$$

doivent reproduire des combinaisons rationnelles des invariants primitifs S et T. C'est effectivement ce que ce savant géomètre a mis en évidence en donnant dans les Tables qui terminent son troisième Mémoire sur les *quantics* les expressions complétement développées de ces quatre quantités. En cherchant à approfondir la nature de ces expressions, j'ai été conduit à un résultat intéressant, non-seulement parce qu'il en montre le véritable caractère, mais parce qu'il donne un nouvel exemple de cette étroite connexion entre les formes cubiques à trois indéterminées et les formes biquadratiques binaires, que M. Hesse et M. Arouhold ont les premiers signalés dans leurs belles recherches. Mais je dois rappeler d'abord qu'en représentant une forme binaire du quatrième degré par

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

on a pour les covariants des degrés quatrième et sixième, ces expressions

$$g = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ec - d^2)y^4,$$

$$\begin{aligned} h = {} & (a^2d - 3abc + 2b^3)x^6 \\ & + (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6bc^2)x^5y \\ & + (5abe - 15acd + 10b^2d)x^4y^2 \\ & + (-10ad^2 + 10b^2e)x^3y^3 \\ & + (-5ade + 15bce - 10bd^2)x^2y^4 \\ & + (-ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2)xy^5 \\ & + (-be^2 + 3cde - 2d^3)y^6. \end{aligned}$$

Cela posé, je considère la forme biquadratique suivante en α et β,

savoir :

$$f = \alpha^4 - 24 S \alpha^2 \beta^2 - 8 T \alpha\beta^3 - 48 S^2 \beta^4,$$

et si l'on en déduit, d'après les formules qui viennent d'être rapportées, les deux covariants g et h, on aura ces formules remarquables, savoir :

$$S(\alpha U + 6\beta HU) = -\frac{1}{24} g,$$

$$T(\alpha U + 6\beta HU) = -\frac{1}{8} h,$$

$$64 S^3 (\alpha U + 6\beta HU) - T^2 (\alpha U + 6\beta HU) = (64 S^3 - T^2) f.$$

Soit en second lieu

$$f = 48 S \alpha^4 + 8 T \alpha^3 \beta - 96 S^2 \alpha^2 \beta^2 - 24 TS \alpha\beta^3 - (T^2 + 16 S^3) \beta^4,$$

on obtiendra d'une manière toute semblable

$$S(6\alpha PU + \beta QU) = -\frac{1}{64} g,$$

$$S(6\alpha PU + \beta QU) = -\frac{1}{128} h,$$

$$64 S^3 (6\alpha PU + \beta QU) - T^2 (6\alpha PU + \beta QU) = (64 S^3 - T^2)^2 f.$$

Ces deux formes f du quatrième degré que nous avons employées successivement ont d'ailleurs entre elles cette liaison singulière, que si l'on désigne par k, k', k'', k''' les racines de l'équation

$$x^4 - 24 S x^2 - 8 T x - 48 S^2 = 0,$$

les racines de l'autre forme, c'est-à-dire de l'équation

$$48 S x^4 + 8 T x^3 - 96 S^2 x^2 - 24 TS x - (T^2 + 16 S^3) = 0,$$

seront

$$\frac{1}{4} k + \frac{S}{k}, \quad \frac{1}{4} k' + \frac{S}{k'}, \quad \frac{1}{4} k'' + \frac{S}{k''}, \quad \frac{1}{4} k''' + \frac{S}{k'''}.$$

Je reviendrai sur ce point dans un prochain travail, où je me propose d'établir entre autres choses cette proposition, qu'il existe toujours *une substitution linéaire réelle* pour réduire toute forme cubique donnée à coefficients réels à l'expression canonique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6\,lxyz.$$

La même chose n'a pas lieu, comme on sait, ni pour les formes biquadratiques, ni pour les formes cubiques à deux indéterminées.

SUR UN CERTAIN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. PAINVIN,

Docteur ès Sciences.

Le système d'équations que je considère est le suivant :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} h_1 = r, \\ h_2 = (r-1)h_1 - \mu.a, \\ h_3 = (r-2)h_2 - 2(\mu-1)ah_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{i+1} = (r-i)h_i - i(\mu-i+1)ah_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{\mu+1} = (r-\mu)h_\mu - \mu.1.ah_{\mu-1}; \end{array}\right.$$

r étant une inconnue, a une constante quelconque, et μ un nombre entier. Ce système s'est présenté à M. Liouville dans des recherches importantes sur l'intégration des équations différentielles (*Journal de Mathématiques*, 1re série, tome V); M. Liouville en a déduit un théorème d'algèbre que je me propose d'établir dans cette Note, en ne m'appuyant que sur les propriétés les plus élémentaires des déterminants.

Soit le déterminant

$$D_{\mu+1} = \left|\begin{array}{ccccccccc} a_1 & m_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & a_2 & m_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & a_3 & m_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & a_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{\mu-2} & m_{\mu-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n_{\mu-2} & a_{\mu-1} & m_{\mu+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n_{\mu-1} & a_\mu & m_\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n^\mu & a_{\mu+1} \end{array}\right|$$

Si l'on désigne par D_i le déterminant qui, commençant à l'élément a_1, se continue jusqu'à l'élément a_i inclusivement, la loi de formation des

déterminants conduit immédiatement aux relations :

$$(2)\quad \begin{cases} D_{\mu+1} = a_{\mu+1} D_\mu - m_\mu n_\mu D_{\mu-1}, \\ D_\mu = a_\mu D_{\mu-1} - m_{\mu-1} n_{\mu-1} D_{\mu-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ D_{i+1} = a_{i+1} D_i - m_i n_i D_{i-1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ D_3 = a_3 D_2 - m_2 n_2 D_1, \\ D_2 = a_2 D_1 - m_1 n_1, \\ D_1 = a_1. \end{cases}$$

Si maintenant on pose

$$(3)\quad \begin{cases} a = \alpha(\alpha - 1), \\ a_k = r - k + 1, \\ m_k = k\alpha, \\ n_k = (\mu - k + 1)(\alpha - 1), \end{cases}$$

les équations (2) coïncideront avec les équations (1); d'où l'on conclut

$$(4)\qquad h_i = D_i.$$

Le problème que j'ai en vue consiste à déterminer les racines de l'équation

$$h_{\mu+1} = D_{\mu+1} = 0,$$

obtenue par l'élimination successive des quantités $h_1, h_2, \dots, h_\mu$, ou, en d'autres termes, les valeurs de r qui annulent le déterminant

$$\begin{vmatrix} r & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu(\alpha-1) & r-1 & 2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mu-1)(\alpha-1) & r-2 & 3\alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu-2)(\alpha-1) & r-3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r-\mu+3 & (\mu-2)\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3(\alpha-1) & r-\mu+2 & (\mu-1)\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2(\alpha-1) & r-\mu+1 & \mu\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha-1 & r-\mu \end{vmatrix}$$

Or, si l'on ajoute toutes les lignes horizontales à la première, on obtient une ligne dont tous les termes sont égaux à $r + \mu(\alpha - 1)$; par suite, le déterminant (I) s'annule pour $r = \mu(1 - \alpha)$.

Divisons, maintenant, tous les termes de la première ligne par $r + \mu(\alpha - 1)$, puis retranchons la deuxième colonne, à gauche, de la première; la troisième de la deuxième, etc.; la dernière de l'avant-dernière; le déterminant (I) se réduira à la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccc}
r+\mu(\alpha-1)+1 & r-2\alpha-1 & 2\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
(\mu-1)(\alpha-1) & -r+(\mu-1)(\alpha-1)+2 & r-3\alpha-2 & 3\alpha & \ldots & 0 & 0 \\
0 & -(\mu-2)(\alpha-1) & -r+(\mu-2)(\alpha-1) & r-4\alpha-3 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(\mu-3)(\alpha-1) & -r+(\mu-3)(\alpha-1)+4 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(\mu-4)(\alpha-1) & \ldots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (\mu-2)\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r-(\mu-1)\alpha-\mu+2 & (\mu-1)\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -r+2(\alpha-1)+\mu-1 & r-\mu\alpha-\mu+1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -(\alpha-1) & -r+(\alpha-1)+\mu
\end{array}$$

Ajoutons alors à la première ligne toutes les lignes horizontales inférieures; à la deuxième, toutes les lignes horizontales inférieures, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière ligne; changeons ensuite le signe de tous les termes du déterminant ainsi formé, et posons

$$r - \alpha = r_1,$$

on obtient le déterminant

$$\text{(II)}\quad \left|\begin{array}{ccccccccc}
r_1 & \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(\mu-1)(\alpha-1) & r_1-1 & 2\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (\mu-2)(\alpha-1) & r_1-2 & 3\alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (\mu-3)(\alpha-1) & r_1-3 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r_1-\mu+4 & (\mu-3)\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3(\alpha-1) & r_1-\mu+3 & (\mu-2)\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2(\alpha-1) & r_1-\mu+2 & (\mu-1)\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & (\alpha-1) & r_1-\mu+1
\end{array}\right|$$

On voit que ce déterminant ne diffère du déterminant (I) que par le changement de r en r_1 et de μ en $(\mu-1)$; donc ce dernier déterminant s'annulera pour

$$r_1 = (\mu - 1)(1 - \alpha);$$

et, par suite, le déterminant (I) s'annulera pour

$$r = \alpha + (\mu - 1)(1 - \alpha).$$

Si maintenant on fait subir au déterminant (II) les mêmes transformations que celles qu'on a fait subir au déterminant (I), et qu'on pose

$$r_2 = r_1 - \alpha,$$

on obtiendra nécessairement un troisième déterminant qui ne différera du déterminant (II) que par le changement de r_1 en r_2 et de $(\mu-1)$ en $(\mu-2)$; donc ce troisième déterminant s'annulera pour

$$r_2 = (\mu - 2)(1 - \alpha),$$

et, par suite, le déterminant (I) s'annulera pour

$$r = 2\alpha + (\mu - 2)(1 - \alpha).$$

Après la $(\mu-2)^{ième}$ transformation, on arrivera au déterminant

$$(\mu - 1) \qquad \begin{vmatrix} r_{\mu-2} & \alpha & 0 \\ 2(\alpha - 1) & r_{\mu-2} - 1 & 2\alpha \\ 0 & (\alpha - 1) & r_{\mu-2} - 2 \end{vmatrix}$$

qui s'annule pour

$$r_{\mu-2} = 2(1 - \alpha);$$

d'où

$$r = (\mu - 2)\alpha + 2(1 - \alpha).$$

Le déterminant $(\mu-1)$, soumis au même calcul que le précédent, conduira au déterminant

$$(\mu) \qquad \begin{vmatrix} r_{\mu-1} & \alpha \\ (\alpha - 1) & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix}$$

qui s'annule pour

$$r_{\mu-1} = (1 - \alpha);$$

d'où

$$r = (\mu - 1)\alpha + (1 - \alpha).$$

Enfin le déterminant (μ) donnera successivement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (\alpha - 1) & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha - r_{\mu-1} & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix} = r_{\mu-1} - \alpha;$$

par suite,

$$r_{\mu-1} = \alpha;$$

d'où

$$r = \mu\alpha.$$

On voit donc que les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant (I) sont

$$\mu\alpha;\ (\mu - 1)\alpha + (1 - \alpha);\ (\mu - 2)\alpha + 2(1 - \alpha);\ldots;\ (\mu - i)\alpha + i(1 - \alpha),\ldots,$$
$$\alpha + (\mu - 1)(1 - \alpha);\ \mu(1 - \alpha);$$

ou bien, en posant $\delta = 1 - 2\alpha$,

$$\mu\alpha,\ \mu\alpha + \delta,\ \mu\alpha + 2\delta,\ldots,\ \mu\alpha + i\delta,\ldots,\ \mu\alpha + (\mu - 1)\delta,\ \mu\alpha + \mu\delta;$$

ces racines forment une progression arithmétique dont le premier terme est $\mu\alpha$, et la raison $\delta = 1 - 2\alpha$.

Ainsi, lorsque des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_\mu, h_{\mu+1}$ sont définies par des équations telles que les équations (1), la quantité $h_{\mu+1}$ ou le déterminant (I) a pour expression

$$(r - \mu\alpha)(r - \mu\alpha - \delta)\ldots(r - \mu\alpha - i\delta)\ldots[r - \mu\alpha - (\mu - 1)\delta](r - \mu\alpha - \mu\delta),$$

la constante α étant donnée par l'équation du second degré

$$\alpha(\alpha - 1) = a.$$

Il est facile de voir que l'on obtient toujours les mêmes racines pour l'équation

$$h_{\mu+1} = 0,$$

quelle que soit la valeur qu'on adopte pour α; je supposerai donc

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4a};$$

d'où

$$\delta = -\sqrt{1+4a}.$$

Si l'on fait

$$a = -\frac{1}{4},$$

d'où il résulte

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \delta = 0,$$

on est conduit à l'identité remarquable

$$\begin{vmatrix}
r & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mu}{2} & r-1 & \frac{2}{2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\mu-1}{2} & r-2 & \frac{3}{2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\mu-2}{2} & r-3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r-\mu+2 & \frac{\mu-1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{2}{2} & r-\mu+1 & \frac{\mu}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{2} & r-\mu
\end{vmatrix} = \left(r - \frac{\mu}{2}\right)^{\mu+1}$$

NOTE

A L'OCCASION DU MÉMOIRE DE M. HIRST SUR L'ATTRACTION DES PARABOLOIDES ELLIPTIQUES;

PAR M. BOURGET,

Professeur à la Faculté de Clermont-Ferrand.

M. Hirst a traité dans le cahier de novembre dernier la question de l'attraction des paraboloïdes elliptiques, en suivant une marche analogue à celle que j'avais choisie dans une Thèse présentée à la Faculté de Paris en mai 1852.

Toutefois nos procédés diffèrent en plus d'un point. Pensant que les considérations géométriques nouvelles qui me servaient de base méritent l'attention des lecteurs de ce Journal, je vais présenter ici un résumé rapide de cette Thèse.

1. Si, par un point O extérieur ou intérieur à un paraboloïde elliptique, on mène une sécante OAB, puis par le sommet S une parallèle SC, puis par le point C un plan perpendiculaire à la sécante, on intercepte sur l'axe principal une longueur SD que je nomme *sous-corde*. Je nomme aussi *parallèle* la ligne OI menée du point O parallèlement à l'axe du paraboloïde jusqu'à la rencontre de sa surface. Ces définitions posées, on démontre sans peine le théorème suivant :

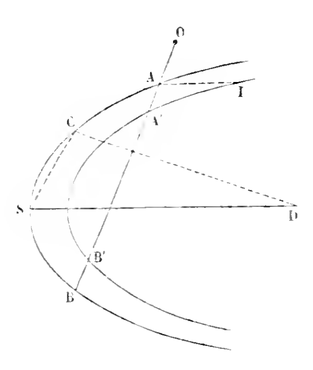
THÉORÈME I. — *Le produit de la sécante entière par sa partie extérieure*, ou bien *le produit des deux parties de la sécante dans le cas où le point est intérieur, est égal au produit de la sous-corde par la parallèle.*

En d'autres termes,

$$OA.OB = SD.OI.$$

2. Considérons maintenant deux paraboloïdes isothétiques, et cher-

chons l'attraction exercée sur le point O de masse unité par l'élément



infiniment petit intercepté dans un cône partant du point O et infiniment mince. Cette action élémentaire sera pour l'élément en A

$$\psi = \frac{f\rho\, dv}{r^2},$$

f étant l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance, ρ étant la densité de la couche. Prenons trois axes rectangulaires passant par O, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; désignons par θ l'angle de OA avec $O\xi$, par φ l'angle de sa projection avec $O\eta$, nous pourrons prendre pour dv

$$r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr,$$

donc

$$\psi = f\rho\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

La quantité dr n'est autre chose que AA'; or si, par le point A, nous menons la *parallèle* $AI = \omega$, puis la sous-corde de la sécante OA, il vient

$$AA'.AB' = \omega\, SD;$$

donc

$$dr = AA' = \omega \frac{SD}{AB'},$$

ou bien

$$dr = \omega \frac{SD}{AB},$$

en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur. Donc il nous vient

(1) $$\psi = f\rho\omega \frac{SD}{AB} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

3. Nous avons laissé arbitraire l'axe $O\xi$; choisissons maintenant l'axe principal du cône circonscrit au paraboloïde par le point O. On établit sans peine que *tout cône formé par des sécantes telles que*

$$\frac{SD}{AB} = \text{const.},$$

a même axe principal que ce cône circonscrit; et cet axe est normal au paraboloïde passant par le point O, et homofocal à la couche externe, d'après un théorème de M. Chasles.

De là on conclut évidemment, en ayant égard à la formule (1), les deux théorèmes suivants :

Théorème II. — *Un point intérieur n'est pas attiré par une couche infiniment mince.*

Théorème III. — *L'attraction d'une couche infiniment mince sur un point extérieur est dirigée suivant la normale en ce point au paraboloïde qui y passe, et qui est homofocal à la surface extérieure de la couche.*

4. Les surfaces de niveau étant connues par ce qui précède, j'en déduisais, comme M. Hirst, la valeur de l'attraction et du potentiel, et je trouvais, après une intégration et la détermination de la constante par la recherche directe de l'attraction sur un point de la surface,

(2) $$\frac{dV}{d\varepsilon} = -\frac{4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}};$$

ε est le paramètre du paraboloïde homofocal passant par le point O, il est déterminé par l'équation

(3) $$\frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon} = x + \varepsilon.$$

5. De la formule (2) on déduit immédiatement pour un point exté-

rieur

$$V = A - 4\pi\rho\omega\sqrt{4pq}\int\frac{d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}},$$

l'intégration est facile; il reste à déterminer la constante A, qui est indépendante de ε. Mais mon but étant de prouver que A est infini, je puis me placer dans le cas particulier d'un paraboloïde de révolution: faisons donc

$$p = q,$$

il vient

$$V_1 = A_1 - 8\pi\rho\omega p\int\frac{d\varepsilon}{2p+4\varepsilon},$$

et, par suite,

$$V_1 = A_1 - 2\pi\rho\omega p\,\mathcal{L}(2p+4\varepsilon).$$

Cette expression se réduit à

$$V_1 = A_1 - 2\pi\rho\omega p\,\mathcal{L}(2p),$$

si je prends un point situé au sommet de la couche attirante, ce qui ne change rien à A_1.

Dans cette dernière hypothèse, il est facile de déterminer directement V_1. Prenons pour élément de volume le petit cylindre formé par l'élément de surface de la couche externe, et la portion de normale δn comprise entre les deux couches, on aura

$$dv = \sigma\delta n;$$

prenons pour élément de surface le rectangle formé par l'élément ds de la parabole génératrice, et l'arc $y\,d\varphi$ de la rotation élémentaire, nous aurons

$$dv = y\,d\varphi\,ds\,\delta n.$$

Mais si par les extrémités de ds on mène des parallèles à l'axe, on forme un parallélogramme $\omega\,dy$ équivalent au rectangle $ds\,\delta n$; donc

$$dv = \omega y\,dy\,d\varphi:$$

nous aurons donc pour la différentielle du potentiel

$$\frac{\rho\omega\, y\, dy\, d\varphi}{r} = \frac{\rho\omega\, y\, dy\, d\varphi}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

ou

$$\frac{\rho\omega\, dy\, d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}}}:$$

intégrons pour φ de 0 à 2π, et par rapport à y de 0 à ∞, nous aurons

$$V_1 = 2\rho\omega\pi \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{4p^2}}} = \infty;$$

donc

$$A_1 = \infty;$$

donc aussi

$$A = \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. La valeur du potentiel relativement à un point intérieur s'obtient directement avec facilité par les considérations suivantes :

Par le point O en question menons une sécante OAB et imaginons dans la direction de cette ligne un cône infiniment petit d'ouverture qui intercepte en A et B dans la couche infiniment mince des éléments de volume dv, dv'. Nous aurons deux éléments correspondants du potentiel

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}}, \quad \frac{\rho\, dv'}{\mathrm{OB}}.$$

Si par le point O nous imaginons trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et si nous désignons par θ l'angle de OA avec la ligne $O\xi$, par φ l'angle de sa projection avec $O\eta$, nous avons déjà trouvé

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}^2} = \rho\omega \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

donc

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}} = \rho\omega \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}} \mathrm{OA} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

et aussi

$$\frac{\rho\, dv'}{\mathrm{OB}} = \rho\omega \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AB}}\, \mathrm{OB} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

donc

$$\frac{\rho\, dv}{\mathrm{OA}} + \frac{\rho\, dv'}{\mathrm{OB}} = \rho\omega\, \mathrm{SD} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

On trouve facilement

$$\mathrm{SD} = \frac{1}{\sin^2\theta\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{2p} + \dfrac{\sin^2\varphi}{2q}\right)},$$

en prenant les axes parallèles aux anciens.

Substituant et intégrant par rapport à θ de o à $\frac{\pi}{2}$, et par rapport à φ de o à 2π, nous obtiendrons le potentiel demandé. Donc nous aurons

$$\mathrm{V} = \rho\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta\, d\varphi}{\sin\theta\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{2p} + \dfrac{\sin^2\varphi}{2q}\right)}.$$

Or la première intégration

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

donne l'infini : donc

$$\mathrm{V} = \infty. \qquad \text{C. Q. F. D [*].}$$

---

[*] Par inadvertance, j'avais posé dans mes Notes

$$\mathrm{SD} = \frac{1}{\sin\theta\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{2p} + \dfrac{\sin^2\varphi}{2q}}};$$

c'est la raison de mon assertion erronée, rectifiée par M. Hirst.

NOTE

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS;

Par M. E. DE JONQUIÈRES,

Lieutenant de Vaisseau.

I.

Problème. *Étant donnés neuf points d'une surface du second degré, reconnaître si un dixième point donné est intérieur ou extérieur à la surface.*

Il s'agit, bien entendu, de résoudre la question sans construire la surface, et en n'employant, comme cela doit être, que la règle et le compas.

Solution. Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i les neuf points, et O celui dont il faut reconnaître la position par rapport à la surface du second ordre S que les neuf points déterminent.

Le point O est extérieur ou intérieur à la surface, selon que la courbe d'intersection de cette surface par le plan polaire du point O est réelle ou imaginaire. Qu'on fasse passer un plan par le point O et par deux des points donnés, a et b par exemple; soient Σ la conique d'intersection de ce plan et de la surface, et L la droite suivant laquelle il coupe le plan polaire. La question se réduit à savoir si le point O est extérieur ou intérieur à la courbe Σ, ou, en d'autres termes, si les points de rencontre de Σ et de L sont réels ou imaginaires. On trouvera ci-après, § VI, la solution très-simple de cette question. Mais pour prouver que cette solution satisfait pleinement aux conditions du problème proposé, il faut montrer comment on peut déterminer cinq points de la conique Σ en n'employant que des constructions élémentaires. Cette détermination fait l'objet des trois paragraphes qui suivent.

II.

On va construire les points a' et b' où les droites Oa et Ob respectivement traversent une seconde fois la surface S, et pareillement les

deux points λ, λ' où une droite quelconque O*l* du plan O*ab* rencontre S; on aura de la sorte six points de la conique Σ. Ensuite les points α et β, conjugués harmoniques du point O par rapport aux segments *aa'*, *bb'* respectivement, détermineront la polaire L, dont il suffira enfin de reconnaître la position relativement à cette conique.

III.

Pour trouver les points *a'*, *b'*, λ et λ', il faut savoir résoudre la question suivante :

Étant donnés une droite A *et six points a, b, c, d, e, f d'un hyperboloïde à une nappe, construire les autres génératrices rectilignes de la surface.*

Par la droite A et les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, on fait passer cinq plans. On mène les quatre droites *fa*, *fb*, *fc*, *fd*, qu'un plan quelconque T coupe en α, β, γ, δ respectivement, et l'on détermine sur ce plan [par des constructions linéaires (voir *Géométrie supérieure*)] la conique C qui est *capable* du rapport anharmonique des quatre plans A*a*, A*b*, A*c*, A*d*. Toutes les génératrices du cône (*f*C) qui a cette conique pour base et pour sommet le point *f*, sont telles, que le rapport anharmonique des quatre plans menés par chacune d'elles et par les quatre points *a*, *b*, *c*, *d*, est constant.

On détermine pareillement le cône (*f*C') qui est capable d'un rapport anharmonique constant et égal à celui des quatre plans A*a*, A*b*, A*c*, A*e*.

Ces deux cônes se coupent suivant une arête *ff'* telle, que les deux faisceaux de plans

$$A[a, b, c, d, e] \quad \text{et} \quad ff'[a, b, c, d, e]$$

sont homographiques. Donc (*Géom. sup.*, n° **411**), ces deux faisceaux de plans engendrent l'hyperboloïde à une nappe, qui est déterminé par les données de la question, et dont on obtiendra ainsi autant de génératrices rectilignes qu'on le voudra.

Il est d'ailleurs évident que l'arête *ff'* se construit linéairement, puisqu'il suffit de trouver sur le plan T le quatrième point d'intersection de deux coniques C et C', qui ont trois points communs connus a priori, savoir α, β et γ.

IV.

Actuellement, *Etant donnés neuf points $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ d'une surface du second degré* S, *et une droite aO menée par l'un a de ces points, on demande de construire le deuxième point a' de rencontre de cette droite avec la surface.*

Qu'on imagine l'hyperboloïde à une nappe H qui passe par la droite ib et par les six points c, d, e, f, g, h; et pareillement, l'hyperboloïde K qui passe par la droite ic et par les six points b, d, e, f, g, h. Les surfaces S, H et K ont huit points communs; donc une droite quelconque les rencontre en six points en involution. Soient h, h' et k, k' les points de rencontre de la droite aO avec H et K respectivement; les six points h, h', k, k', a, a' sont en involution. Les cinq premiers étant connus, le sixième se construit aisément. On admet ici que les points h, h' (et de même k et k') sont connus; car, pour les obtenir, il suffit de mener par la droite aO un plan quelconque tel que aOb; de déterminer, par la construction du problème précédent (III), cinq génératrices rectilignes de la surface H, et par suite leurs intersections avec le plan aOb, et enfin de chercher les deux points de rencontre de la droite aO avec la conique que ces cinq points déterminent, ce qui n'exige pas qu'elle soit tracée (voir *Géom. sup.*, n° **646**).

V.

Il faut encore indiquer comment on trouve les deux points λ, λ', où la surface S est traversée par une droite Ol qui ne passe par aucun des points donnés de S.

Soient toujours H et K les deux hyperboloïdes du numéro précédent, et soient H' et K' deux autres hyperboloïdes menés, l'un par la droite id et par les six points b, c, e, f, g, h, l'autre par la droite ie et par les six points b, c, d, f, g, h.

Soient mm', nn', pp', qq' les segments interceptés sur Ol par les hyperboloïdes H, K, H', K' respectivement.

Chacune de ces surfaces ayant huit points communs avec S, il s'ensuit que les segments $mm', nn', \lambda\lambda'$ sont en involution, et pareillement les segments $pp', qq', \lambda\lambda'$. Donc le segment $\lambda\lambda'$ se construira comme il est dit n° **271** de la *Géométrie supérieure*.

VI.

On connaît donc enfin six points a, a', b, b', λ, λ' de la conique Σ, et l'on connaît aussi la polaire $\alpha\beta$ (II), ou L du point O par rapport à cette conique. Il ne reste plus qu'à reconnaître si L coupe ou non Σ.

Or les rayons ab, ab', $a\lambda$ coupent L en trois points 1, 2, 3, et les rayons homologues $a'b$, $a'b'$, $a'\lambda$ la coupent en trois points 1', 2', 3'. Ces deux systèmes de trois points déterminent sur L deux divisions homographiques dont on cherchera les deux *points doubles* qui sont précisément les points d'intersection de L et de Σ. Donc, selon que ces points doubles seront réels, coïncidents ou imaginaires (*Géom. sup.*, chap. VIII), le point donné O sera extérieur, adhérent ou intérieur à la surface.

Ainsi le problème est complétement résolu par une méthode purement géométrique, et l'on voit que le § V donne la solution de cette autre question importante : *Etant donnés neuf points d'une surface du second degré, construire la surface.*

Octobre 1857.

SUR LA DÉMONSTRATION DE L'ÉQUATION

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varepsilon k_p;$$

PAR M. R. CLAUSIUS.

Soit donné un espace rempli d'un agent (matière pondérable ou électricité, etc.) dont les éléments exercent sur un point p, dont les coordonnées sont x, y, z, une force attractive ou répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance. Je nommerai cet espace un *corps*, et je désignerai par k la densité à un point quelconque x', y', z', en sorte que kdv soit la quantité de l'agent qui se trouve dans un élément de volume dv. La force que cette petite quantité exerce sur le point p s'exprimera par

$$\frac{\varepsilon k\,dv}{r^2},$$

où r désigne la distance entre l'élément dv et le point p, et où ε est une constante positive ou négative suivant que la force est attractive ou répulsive. Si, de plus, on représente par X, Y, Z les trois composantes de la force que le corps entier exerce sur p, on a l'équation

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varepsilon k_p, \tag{1}$$

où k_p représente la densité au point p, valeur qui est égale à zéro lorsque p se trouve en dehors du corps.

La démonstration de ce théorème ne présente aucune difficulté dans le cas mentionné en dernier lieu, c'est-à-dire lorsque le point p se trouve en dehors du corps, et que tous les éléments du corps ont des distances finies à ce point. Mais si, au contraire, p se trouve au dedans du corps, la distance r devient infiniment petite pour les éléments avoisinants, d'où il suit que les expressions qu'il faut intégrer pour déterminer les coefficients différentiels $\frac{dX}{dx}$, etc., deviennent pour ces élé-

ments infiniment grandes; et c'est de là que s'élève un obstacle qui rend pour ce cas la démonstration du théorème plus difficile.

Qu'il me soit permis de communiquer ici une démonstration qui est, je crois, nouvelle, et qui me semble plus simple que celles que je connais.

Nous supposerons que le point p soit éloigné d'une distance finie de la surface du corps, et que la densité k change seulement peu à peu dans l'intérieur du corps, ou, s'il y a des changements subits, qu'ils se fassent si loin du point p, qu'on puisse construire une surface fermée qui entoure ce point à une distance finie, et dans l'intérieur de laquelle la densité change seulement peu à peu. La partie du corps qui est hors de cette surface peut être négligée dans notre démonstration, parce qu'elle ne peut contribuer en rien à la valeur de la somme des trois coefficients différentiels. Pour plus de simplicité, soit encore supposé que la surface du corps ait une telle forme, que chaque rayon vecteur qui sort du point p ne la coupe qu'une seule fois. Si la surface donnée du corps ne remplit pas cette condition, on peut construire une nouvelle surface qui la remplisse.

Commençons maintenant par développer les expressions des composantes X, Y, Z.

Considérons pour cela une pyramide infiniment étroite qui ait pour sommet le point p, et pour base un élément $d\omega$ de la surface du corps. Qu'une partie infiniment courte de cette pyramide, limitée par deux surfaces sphériques ayant le centre commun p et les rayons r et $r + dr$, soit prise pour l'élément de volume dv. Pour déterminer la grandeur de cet élément, désignons par R la longueur du rayon vecteur mené de p jusqu'à l'élément de surface $d\omega$, et par i le cosinus de l'angle que ce rayon vecteur forme avec la normale érigée sur $d\omega$; alors on aura

$$dv = \frac{r^2}{\mathrm{R}^2} i\, d\omega\, dr.$$

La quantité de l'agent qui se trouve dans cet élément est kdv, et la force qu'elle exerce sur p est égale à

$$\frac{\varepsilon k\, dv}{r^2} = \frac{\varepsilon k i}{\mathrm{R}^2} d\omega\, dr.$$

et par suite la force exercée par la pyramide entière est exprimée par

$$d\omega \frac{\varepsilon i}{R^2} \int_0^R k\,dr.$$

Il sera convenable pour ce qui va suivre d'introduire, au lieu de r, une autre variable, savoir la distance de l'élément de volume dv à l'élément de surface $d\omega$. En désignant cette distance par ρ, on a

$$r = R - \rho,$$
$$dr = -d\rho,$$
$$\int_0^R k\,dr = -\int_R^0 k\,d\rho = \int_0^R k\,d\rho,$$

ce qui change l'expression ci-dessus en

$$d\omega \frac{\varepsilon i}{R^2} \int^R k\,d\rho,$$

ou en

$$d\omega\,\varepsilon K,$$

si l'on fait, pour abréger,

$$(2) \qquad K = \frac{i}{R^2} \int_0^R k\,d\rho.$$

Soient maintenant a, b, c les cosinus des angles que forme le rayon vecteur R avec les axes des coordonnées : alors les trois composantes de la force exercée par la pyramide infiniment étroite seront

$$d\omega\,\varepsilon a K, \quad d\omega\,\varepsilon b K, \quad d\omega\,\varepsilon c K,$$

et par conséquent les composantes cherchées de la force totale

$$(3) \qquad \begin{cases} X = \varepsilon \int d\omega\, aK, \\ Y = \varepsilon \int d\omega\, bK, \\ Z = \varepsilon \int d\omega\, cK. \end{cases}$$

Ces trois formules doivent être différentiées, la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z. Comme les éléments $d\omega$, c'est-à-dire les éléments de la surface du corps auxquels le signe $\int$ est relatif, sont tout à fait indépendants des coordonnées x, y, z du point p, on peut différentier sous ce signe.

Pour effectuer cette différentiation, on peut, pour un élément donné $d\omega$, considérer la quantité K [équation (2)] comme une fonction de a, b, c et R qui, eux-mêmes, sont des fonctions de x, y, z. Car si x', y', z' sont les coordonnées de l'élément de volume dv, la densité k est une fonction de ces variables; mais en désignant par ρ, ξ, ζ les coordonnées de l'élément de surface $d\omega$, on a

$$x' = \xi - a\rho, \quad y' = \eta - b\rho, \quad z' = \zeta - e\rho.$$

Par la substitution de ces valeurs, k devient une fonction de a, b, c et ρ, et par conséquent l'intégrale $\int_0^{\mathrm{R}} k d\rho$ une fonction de a, b, c et R. De même, si α, β, γ sont les cosinus des angles que la normale érigée en dehors du corps sur $d\omega$ forme avec les axes des coordonnées, le cosinus i est déterminé en fonction de a, b et c par l'équation

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{d(a\mathrm{K})}{dx} &= \frac{d(a\mathrm{K})}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d(a\mathrm{K})}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d(a\mathrm{K})}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{d(a\mathrm{K})}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dx} \\ &= \mathrm{K}\frac{da}{dx} + a\left(\frac{d\mathrm{K}}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d\mathrm{K}}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d\mathrm{K}}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right).\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$a = \frac{\xi - x}{\mathrm{R}}, \quad b = \frac{\eta - y}{\mathrm{R}}, \quad c = \frac{\zeta - z}{\mathrm{R}},$$

$$\mathrm{R} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

d'où il suit

$$\frac{da}{dx} = \frac{-1 + a^2}{\mathrm{R}}, \quad \frac{db}{dx} = \frac{ab}{\mathrm{R}}, \quad \frac{dc}{dx} = \frac{ac}{\mathrm{R}}, \quad \frac{d\mathrm{R}}{dx} = -a,$$

ce qui donne

$$\frac{d(a\mathrm{K})}{dx} = \frac{-1+a^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{da} + \frac{a^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}.$$

Des expressions analogues ont lieu pour $\frac{d(b\mathrm{K})}{dy}$ et $\frac{d(c\mathrm{K})}{dz}$, et l'on trouve en définitive

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{X}}{dx} &= \varepsilon\int d\omega\left[\frac{-1+a^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{da} + \frac{a^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right],\\ \frac{d\mathrm{Y}}{dy} &= \varepsilon\int d\omega\left[\frac{-1+b^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{b}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{db} + \frac{b^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right],\\ \frac{d\mathrm{Z}}{dz} &= \varepsilon\int d\omega\left[\frac{-1+c^2}{\mathrm{R}}\mathrm{K} - \frac{c}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{K}}{dc} + \frac{c^2}{\mathrm{R}}\left(a\frac{d\mathrm{K}}{da} + b\frac{d\mathrm{K}}{db} + c\frac{d\mathrm{K}}{dc}\right) - a^2\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans la somme de ces trois expressions, la plupart des termes se détruisent l'un l'autre, et il reste seulement

$$(5)\qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = -\varepsilon\int d\omega\left(2\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}} + \frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}}\right).$$

D'après l'équation (2), on a

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{R}} = \frac{d}{d\mathrm{R}}\left(\frac{i}{\mathrm{R}^2}\int_0^{\mathrm{R}} k d\rho\right) = -2\frac{i}{\mathrm{R}^3}\int_0^{\mathrm{R}} k d\rho + \frac{i}{\mathrm{R}^2}\frac{d}{d\mathrm{R}}\int_0^{\mathrm{R}} k d\rho.$$

Le premier de ces deux termes se réduit, en vertu de la même équation (2), à

$$-2\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}.$$

Quant au second terme, on sait généralement que

$$\frac{d}{d\mathrm{R}}\int_0^{\mathrm{R}} f(\rho)\, d\rho = f(\mathrm{R});$$

il faut donc, dans notre cas, substituer R au lieu de ρ dans la formule qui représente la densité k en fonction de a, b, c et ρ. Mais alors la formule donne cette valeur de k qui correspond au point p et qui est

désignée par k_p, en sorte qu'on a

$$\frac{d}{dR}\int_0^R k\,d\rho = k_p.$$

Ainsi le coefficient différentiel $\frac{dK}{dR}$ sera déterminé par

$$\frac{dK}{dR} = -2\frac{K}{R} + \frac{i}{R^2}k_p,$$

et par suite de cette équation, l'équation (5) deviendra

$$(6)\qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -\varepsilon k_p \int d\omega\,\frac{i}{R^2}.$$

On voit aisément que le produit $d\omega\,\frac{i}{R^2}$ n'est autre chose que l'élément de surface que la pyramide infiniment étroite dont nous avons parlé plus haut découpe sur une sphère construite avec le rayon 1 autour du point p. L'intégrale représente donc l'aire de cette surface sphérique, c'est-à-dire 4π, et l'on obtiendra

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varepsilon k_p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si le point p est situé infiniment près de la surface du corps, les coefficients différentiels $\frac{d(aK)}{dx}$, etc., deviennent infiniment grands pour les éléments de surface les plus voisins, et dans ce cas il faut faire usage de quelques considérations spéciales pour prouver l'exactitude de notre équation, et de même dans le cas où la densité k change subitement tout pres du point p. Mais je ne veux pas entrer ici dans ces considérations, pour ne pas devenir trop long.

GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE
CONCERNANT
LES SOMMES DES PUISSANCES DES DIVISEURS D'UN NOMBRE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans mon quatrième article sur quelques fonctions numériques (inséré au cahier de décembre 1857), j'ai donné la formule suivante

$$(\theta)\qquad \sum d^{\mu+\nu}\zeta_{\tau-\nu}(d)\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^{\nu}\zeta_\mu(d)\,\zeta_{\tau+\mu}(\delta),$$

où $\zeta_\mu(m)$ représente généralement la somme des puissances de degré μ des diviseurs d du nombre $m = d\delta$; c'est à ces diviseurs d, dont 1 et m font toujours partie, que se rapportent les sommes indiquées. Les exposants ou indices μ, ν, τ sont tout à fait quelconques : on pourrait même les prendre imaginaires et par suite décomposer en deux équations distinctes la formule que nous venons d'écrire, ce qui conduirait à des résultats nouveaux et curieux.

En observant que l'on a

$$m^\mu\,\zeta_{-\mu}(m) = \zeta_\mu(m),$$

on peut mettre l'équation (θ) sous diverses formes. Déjà, dans la Note citée, je lui ai donné celle-ci :

$$(\iota)\qquad \sum d^{\mu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^{\nu}\zeta_{\mu+\tau}(d)\,\zeta_\mu(\delta).$$

J'ajoute aujourd'hui la suivante :

$$(\upsilon)\qquad \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_\mu(\delta) = \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu}(d)\,\zeta_{\mu+\tau}(\delta).$$

On pourrait même poser

$$(\omega)\qquad \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_{\mu+\rho}(\delta) = \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu+\rho}(d)\,\zeta_{\mu+\tau}(\delta);$$

mais en examinant de près cette dernière formule, on voit que, malgré la présence d'un nouvel indice arbitraire ρ, elle n'est pas au fond plus générale que les précédentes.

On obtiendra comme il suit un résultat beaucoup plus étendu et applicable à des fonctions numériques d'une autre nature que $\zeta_\mu(m)$, quoique déduites aussi de la considération des puissances des diviseurs d du nombre m.

Soient $f(m)$ et $F(m)$ deux fonctions numériques quelconques de l'entier m, en sorte que si l'on pose successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, on ait pour $f(m)$ et $F(m)$ des valeurs déterminées $f(1), f(2), f(3), \ldots$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3), \ldots$; et faisons

$$X_\mu(m) = \sum d^\mu f(d),$$

$$Z_\mu(m) = \sum d^\mu F(d).$$

Si l'on prenait généralement $f(m) = 1$, la fonction $X_\mu(m)$ se réduirait a $\zeta_\mu(m)$; mais en prenant pour $f(m)$ d'autres valeurs, on obtiendra d'autres fonctions numériques dont la considération pourra être utile. Bornons-nous, par exemple, aux nombres impairs, et, dans cette hypothèse, prenons

$$f(m) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}:$$

il s'ensuivra

$$X_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^\mu .$$

Dans le cas particulier de $\mu = 0$, on aura donc alors

$$X_0(m) \quad \text{ou} \quad X(m) = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} .$$

Or cette dernière fonction numérique est d'une haute importance; c'est celle qui exprime le nombre des représentations de $2m$ par une somme de deux carrés impairs, je veux dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2,$$

où le premier membre est égal au double de l'entier impair donné m et où x et y sont des nombres impairs et positifs, deux solutions étant regardées comme différentes quand x et y n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. J'espère avoir plus tard l'occasion de montrer que la fonction

$$X_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^\mu,$$

où l'exposant μ est à volonté, se présente aussi dans les applications.

Revenons à nos formules générales

$$X_\mu(d) = \sum d^\mu f(d), \quad Z_\mu(m) = \sum d^\mu F(d).$$

Les fonctions

$$X_\mu(m), \quad Z_\mu(m),$$

jouiront, quelles que soient $f(m)$ et $F(m)$, d'un grand nombre de propriétés. Mais je ne veux ici en signaler qu'une. Cette propriété me semble remarquable en ce que les fonctions f et F n'entrent aucunement dans l'équation qui l'exprime : les fonctions X et Z y figurent seules avec différents indices.

En désignant en effet par μ et ν deux quantités quelconques, entières ou non, positives ou négatives, ou même, si l'on veut, imaginaires, on a

$$\text{(A)} \qquad \sum d^{\mu-\nu} X_\nu(d) Z_\mu(\delta) = \sum d^{\mu-\nu} Z_\nu(d) X_\mu(\delta).$$

Le second membre ne diffère du premier que par la permutation des deux lettres X et Z.

Si l'on prenait

$$f(m) = m^\tau, \quad F(m) = m^\rho,$$

l'équation (A) se changerait dans l'équation donnée plus haut entre les fonctions ζ :

$$(\omega) \qquad \sum d^{\mu-\nu} \zeta_{\nu+\tau}(d) \zeta_{\mu+\rho}(\delta) = \sum d^{\mu-\nu} \zeta_{\nu+\rho}(d) \zeta_{\mu+\tau}(\delta).$$

Elle n'est en effet qu'une généralisation de cette formule particulière.

Il est aisé de vérifier la formule (A) en prenant pour m un nombre premier a. Il n'y a alors que deux diviseurs de m, savoir 1 et a; et la valeur commune des deux membres de notre formule est

$$f(1)\,F(1)\,(1+a^{\mu-\nu})+[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)]\,a^{\mu}.$$

Pour $m=a^2$, la valeur commune est

$$f(1)\,F(1)\,(1+a^{\mu-\nu}+a^{2\mu-2\nu})+[f(1)\,F(a^2)+F(1)\,f(a^2)]\,a^{2\mu}$$
$$+[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)]\,(a^{\mu}+a^{2\mu-\nu})+f(a)\,F(a)\,a^{2\mu}.$$

Enfin pour $m=ab$, a et b désignant deux nombres premiers, ce qui donne lieu aux quatre diviseurs $d=1$, a, b, ab, c'est

$$f(1)F(1)\,(1+a^{\mu-\nu})\,(1+b^{\mu-\nu})$$
$$+a^{\mu}[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)]+b^{\mu}[f(1)\,F(b)+F(1)f(b)]$$
$$+a^{\mu}b^{\mu}[f(1)\,F(ab)+F(1)f(ab)+f(a)F(b)+F(a)\,f(b)]$$
$$+a^{\mu-\nu}b^{\mu}[f(1)\,F(b)+F(1)f(b)]+a^{\mu}b^{\mu-\nu}[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)].$$

On pourrait pousser plus loin ces vérifications de la formule (A) et même tirer de là une démonstration complète de cette formule. Mais je n'insiste pas sur ce sujet, car il y a une méthode bien plus simple que je développerai une autre fois, et qui nous conduira très-rapidement à la formule (A) par une sorte d'algorithme régulier et général.

Parmi les fonctions X et Z pour lesquelles on a la formule (A), je mentionnerai celles qui dépendent du signe

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre, pris avec le sens étendu que lui a donné Jacobi. En désignant par k un nombre entier fixe, positif ou négatif, on fera, par exemple,

$$f(m)=\left(\frac{k}{m}\right),$$

et la fonction

$$\sum \left(\frac{k}{d}\right) d^\mu,$$

qui naîtra de cette hypothèse, sera une de celles qui jouent un rôle dans la théorie des formes quadratiques. On aura une autre fonction non moins importante, savoir

$$\sum \left(\frac{d}{k}\right) d^\mu,$$

en prenant

$$f(m) = \left(\frac{m}{k}\right).$$

Nous renvoyons pour ce qui concerne le symbole

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

aux articles que M. Lebesgue a insérés dans ce Journal (1[re] série, t. XII et t. XV). Observons pourtant que, comme on suppose d'ordinaire, en employant ce signe, que a et b sont premiers entre eux, il conviendra de n'introduire dans $\left(\frac{k}{m}\right)$ et dans $\left(\frac{m}{k}\right)$ que des nombres m premiers à k; les diviseurs d de ces nombres seront aussi premiers à k. Toutefois on pourrait admettre des nombres m quelconques, et supposer, comme il est souvent commode de le faire,

$$\left(\frac{k}{m}\right) = 0$$

et

$$\left(\frac{m}{k}\right) = 0,$$

quand m et k ne sont pas premiers entre eux.

On peut substituer à la formule (A) une autre formule équivalente et qui paraîtra sans doute plus simple. Au lieu de prendre, comme nous l'avons fait,

$$X_\mu(m) = \sum d^\mu f(d), \quad Z_\mu(m) = \sum d^\mu \mathrm{F}(d),$$

prenons

$$X_\mu(m) = \sum \delta^\mu f(d), \quad Z_\mu(m) = \sum \delta^\mu F(d);$$

alors au lieu de la formule (A) nous aurons la formule

$$(B) \qquad \sum X_\nu(d)\, Z_\mu(\delta) = \sum Z_\nu(d)\, X_\mu(\delta).$$

Nos lecteurs verront sans peine comment on passe de notre ancienne formule à celle-ci. Toutes deux sont commodes; et, suivant les cas, on devra employer tantôt l'une et tantôt l'autre. La formule

$$(B) \qquad \sum X_\nu(d)\, Z_\mu(\delta) = \sum Z_\nu(d)\, X_\mu(\delta)$$

a l'avantage d'être débarrassée non-seulement des fonctions f et F, mais même du facteur $d^{\mu-\nu}$, qui entrait dans la formule (A).

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1860.)

Considérons trois points matériels m, m', m'' entre lesquels s'exercent des attractions réciproques exprimées par des fonctions quelconques des distances; et admettons, de plus, que les deux points m' et m'' soient assujettis à rester à des distances constantes du point m. Le mouvement des deux points m' et m'' autour du point m présentera une certaine ressemblance avec celui du Soleil et de la Lune autour de la Terre, et quoiqu'en entrant dans le détail on s'aperçoive bien vite que l'analogie dont nous parlons est moindre qu'on ne l'aurait cru d'abord, il y a peut être quelque intérêt à faire voir que quand le mouvement des trois points m, m', m'' s'effectue dans un plan, les équations différentielles qui le déterminent s'intègrent par de simples quadratures.

Soit O le centre de gravité du système des trois masses m, m', m''. Menons par ce centre, que nous pouvons ici regarder comme immobile, deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy, dont le plan soit celui où nos trois points se meuvent; désignons par a et a' les distances constantes mm', mm'', et par α, α' les angles que ces droites font avec l'axe des x. Si les coordonnées du point m sont représentées par x, y, celles des points m' et m'' seront respectivement

$$x + a\cos\alpha, \quad y + a\sin\alpha,$$

et

$$x + a'\cos\alpha', \quad y + a'\sin\alpha'.$$

L'origine étant au centre de gravité, on aura donc

$$(m + m' + m'')x + m'a\cos\alpha + m''a'\cos\alpha' = 0,$$

$$(m + m' + m'')y + m'a\sin\alpha + m''a'\sin\alpha' = 0.$$

On tire de là les coordonnées x, y du point m sous la forme

$$x = \mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{A}'\cos\alpha',$$
$$y = \mathrm{A}\sin\alpha + \mathrm{A}'\sin\alpha',$$

A et A′ étant des constantes, savoir :

$$\mathrm{A} = -\frac{m'a}{m+m'+m''}, \qquad \mathrm{A}' = -\frac{m''a'}{m+m'+m''}.$$

Par suite, les coordonnées du point m' seront :

$$x' = (\mathrm{A}+a)\cos\alpha + \mathrm{A}'\cos\alpha',$$
$$y' = (\mathrm{A}+a)\sin\alpha + \mathrm{A}'\sin\alpha',$$

et celles du point m'' seront de même :

$$x'' = \mathrm{A}\cos\alpha + (\mathrm{A}'+a')\cos\alpha',$$
$$y'' = \mathrm{A}\sin\alpha + (\mathrm{A}'+a')\sin\alpha'.$$

Cela étant, la force vive

$$m\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2} + m''\frac{dx''^2+dy''^2}{dt^2}$$

s'exprimera par

$$\mathrm{E}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\mathrm{F}\cos(\alpha'-\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\alpha'}{dt} + \mathrm{G}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2,$$

E, F, G étant des constantes dont voici les valeurs :

$$\mathrm{E} = (m+m'')\mathrm{A}^2 + m'(\mathrm{A}+a)^2,$$
$$\mathrm{G} = (m+m')\mathrm{A}'^2 + m''(\mathrm{A}'+a')^2,$$

et

$$\mathrm{F} = m\mathrm{A}\mathrm{A}' + m'\mathrm{A}'(\mathrm{A}+a) + m''\mathrm{A}(\mathrm{A}'+a').$$

En posant

$$\alpha' = \alpha + \beta,$$

on changera cette expression de la force vive en une autre

$$(\mathrm{E}+2\mathrm{F}\cos\beta+\mathrm{G})\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2(\mathrm{F}\cos\beta+\mathrm{G})\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \mathrm{G}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2,$$

dans laquelle les coefficients ne contiennent plus qu'une seule variable β. Or c'est aussi de cette seule variable que dépend la fonction des forces. En effet, les distances a, a' étant constantes, on n'a point à

s'occuper des actions mutuelles de m et m' et de m et m'', qui se font équilibre. Les seules forces dont on ait à tenir compte proviennent des attractions réciproques de m et m''. La fonction des forces ne dépend donc que de la distance $m'm''$, laquelle étant égale à

$$\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\beta},$$

ne dépend elle-même que de la variable β.

Actuellement remarquons, d'une manière générale, que, quand dans une question de Mécanique il arrive ainsi qu'il n'entre explicitement qu'une seule variable β dans les coefficients de l'expression de la force vive et dans la fonction des forces, celles des équations différentielles, formées d'après la méthode de Lagrange, où la dérivée de la fonction des forces est prise par rapport aux variables autres que β, s'intègrent d'elles-mêmes, en sorte qu'en les joignant à l'intégrale des forces vives, on peut exprimer la différentielle $d\alpha$, etc., de chaque variable et celle dt du temps par des expressions de la forme $f(\beta)\,d\beta$, après quoi l'intégration s'achève par les quadratures.

Dans le problème actuel, en désignant par $\varphi(\beta)$ la fonction des forces et par h une constante arbitraire, l'intégrale des forces vives est

$$(E + 2F\cos\beta + G)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2(F\cos\beta + G)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + G\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = 2[\varphi(\beta) + h].$$

Les principes de la *Mécanique analytique* fournissent d'ailleurs deux équations différentielles, dont je transcris la première seulement :

$$\frac{d}{dt}\left[(E + 2F\cos\beta + G)\frac{d\alpha}{dt} + (F\cos\beta + G)\frac{d\beta}{dt}\right] = 0.$$

Je n'ajoute pas la seconde, où entrerait la dérivée $\varphi'(\beta)$ de la fonction des forces ; elle nous est inutile, car celle des forces vives la remplace.

L'équation différentielle que je viens d'écrire s'intègre d'elle-même et donne

$$(E + 2F\cos\beta + G)\frac{d\alpha}{dt} + (F\cos\beta + G)\frac{d\beta}{dt} = k,$$

k étant une constante arbitraire.

De cette intégrale et de celle des forces vives, on tirera, en résolvant

une équation du second degré, les valeurs de

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}$$

en fonction de β. Soit donc

$$\frac{d\beta}{dt} = \psi(\beta),$$

il s'ensuivra que

$$t = \int \frac{d\beta}{\psi(\beta)};$$

ayant ensuite

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varpi(\beta),$$

on en conclura

$$d\alpha = \frac{\varpi(\beta)}{\psi(\beta)} d\beta,$$

et, partant,

$$\alpha = \int \frac{\varpi(\beta)}{\psi(\beta)} d\beta;$$

ainsi la question est ramenée aux quadratures, comme nous l'avions dit.

On arriverait au même résultat en se servant de l'équation aux différences partielles, que Jacobi a substituée aux équations de Lagrange. Une solution complète de cette équation fournit toutes les intégrales. Or, quand il n'entre qu'une seule variable β dans la fonction des forces et dans les coefficients de l'expression de la force vive, il n'entre aussi que cette variable β dans les coefficients de l'équation de Jacobi, de sorte qu'on en a facilement une solution complète en égalant à des constantes arbitraires les dérivées autres que $\frac{d\Theta}{d\beta}$ de la fonction Θ qu'elle contient, et en prenant pour $\frac{d\Theta}{d\beta}$ la valeur fonction de β que l'équation fournit ensuite naturellement. Après quoi tout s'achève par une quadrature.

J'ai cru devoir faire ces remarques générales; mais il faut ajouter que le problème particulier dont nous venons de nous occuper n'exige en lui-même aucun artifice. Il nous aurait suffi de joindre à l'intégrale des forces vives l'intégrale que fournit le principe des aires. Cette intégrale revient à celle que nous avons conclue de la méthode de Lagrange, et par conséquent, on en aurait déduit, sans aucun secours étranger, la solution de notre problème.

NOTE

SUR

LA COURBURE DE LA SECTION FAITE DANS UNE SURFACE PAR UN PLAN TANGENT;

PAR M. DE LA GOURNERIE,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. La section d'une surface par un plan normal en un point, et contenant une des deux asymptotes de l'indicatrice de ce point, a un rayon de courbure infini. Le théorème de Meunier montre que le rayon de courbure reste infini quand le plan s'incline sur la surface, mais il n'apprend rien pour la section par le plan tangent, parce que le cosinus de l'angle du plan avec la normale devenant nul, le produit par le rayon se présente sous une forme indéterminée.

Quelques auteurs ont cru que la section par le plan tangent avait un rayon de courbure infini, mais c'est une erreur qu'on peut constater en quelques minutes par la construction d'une courbe de ce genre. En réalité la section tangente n'a généralement qu'un contact du premier ordre avec les asymptotes de l'indicatrice; le contact peut sans doute s'élever accidentellement à un degré quelconque, mais celui des autres sections le dépasse toujours d'une unité, comme nous allons le reconnaître.

2. L'équation d'un plan passant par une asymptote de l'indicatrice est

$$(1)\qquad (p-a)(x'-x)+\left(q+\frac{a}{\alpha}\right)(y'-y)-(z'-z)=0,$$

x', y', z' sont les coordonnées variables;

x, y, z celles du point considéré sur la surface;

p, q, r, s... les dérivées partielles des différents ordres de la fonction z donnée par l'équation de la surface;

α est la tangente de l'angle que la projection horizontale de l'asymptote de l'indicatrice fait avec l'axe des abscisses. On a

$$(2) \qquad t\alpha^2 + 2s\alpha + r = 0.$$

Enfin a est une constante qui achève de déterminer la position du plan. Quand a est nul, le plan est tangent.

L'équation (1) représentera la courbe d'intersection si nous y considérons z' comme une fonction de x' et de y' donnée par l'équation de la surface; alors en la différentiant deux fois nous aurons

$$\left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{dy'}{dx'} + (p' - p + a) = 0.$$

$$(3) \qquad \left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \left[t\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy'}{dx'}\right) + r\right] = 0.$$

En égalant x', y' et z' à x, y et z, les dérivées p', q', r'... deviennent p, q, r,...: $\frac{dx'}{dy'}$ est α, et le second terme de l'équation (3) s'anéantit en vertu de l'équation (2). Par conséquent $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nul, et la courbe a un contact du second ordre avec l'asymptote de l'indicatrice.

3. Si cependant le plan était tangent, a serait nul et la dérivée $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ se présenterait sous une forme indéterminée. Pour avoir sa valeur, il faut différentier l'équation (3) en l'y considérant comme constante. On trouve

$$(4) \quad 3\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \left[v'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^3 + 3w'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + 3u'\left(\frac{dy'}{dx'}\right) + n'\right] = 0.$$

En faisant x', y' et z' égaux à x, y et z, on aura pour la section tangente la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, et on pourra calculer le rayon de courbure de la projection horizontale de la courbe, ou de la courbe elle-même, si on a pris le plan de projection parallèle au plan tangent. Ce rayon de courbure dépend des dérivées partielles du troisième ordre, et par conséquent ne peut pas être déterminé quand on connaît seulement les rayons de courbure des sections principales.

4. Si l'on avait

$$(5) \qquad v\alpha^3 + 3w\alpha^2 + 3u\alpha + u = 0,$$

la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ donnée par l'équation (4) pour le point considéré serait nulle, et la section tangente aurait un contact du second ordre avec l'asymptote de l'indicatrice, mais alors la section quelconque représentée par l'équation (1) aurait un contact du troisième ordre. Si en effet on différentie l'équation (3), on aura le premier membre de l'équation (4), augmenté du terme que donne la différentiation de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{d^3y'}{dx'^3} + 3\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^2y'}{dx'^2} \\ &+ \left[v'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^3 + 3w'\left(\frac{dy'}{dx'^2}\right)^2 + 3u'\frac{dy'}{dx'} + u'\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

En égalant x', y' et z' à x, y et z, le dernier terme disparaît en vertu de l'équation (5), et le second parce que $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nul. Comme d'ailleurs il s'agit d'une section quelconque pour laquelle a n'est pas nul, on voit que $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ l'est, et que le contact s'élève au troisième ordre.

Si le plan était tangent, la dérivée $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ se présenterait sous une forme indéterminée, et en cherchant sa valeur on trouverait une expression qui en général n'est pas nulle, mais qui peut le devenir accidentellement, et alors on reconnaîtrait que $\frac{d^4y'}{dx^4}$ serait nul pour les autres sections. On pourrait remonter ainsi de degré en degré.

5. La manière dont les calculs se présentent montre que la loi est générale, toutefois on peut le prouver régulièrement.

En différentiant n fois l'équation (1) on obtient

$$(7) \left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{d^ny'}{dx'^n} + n\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}} + \mathrm{A}(n-2\ldots\ldots 2) + \mathrm{Z}'_n = 0.$$

Nous représentons par $\mathrm{A}(n-2\ldots\ldots 2)$ une série de termes qui contiennent en facteur les dérivées $\frac{d^{n-2}y'}{dx'^{n-2}}$, $\frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}}$,.... jusqu'à $\frac{d^2y'}{dx'^2}$. L'expres-

sion de Z'_n est

$$(8)\quad Z'_n = \frac{d^n z'}{dy'^n}\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^n + n\,\frac{d^n z'}{dy'^{n-1}\,dx'}\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^n z'}{dy'^{n-2}\,dx'^2}\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^{n-2}.$$

Supposons maintenant que la loi que nous avons indiquée soit satisfaite jusqu'au degré n, c'est-à-dire que l'asymptote de l'indicatrice ait un contact du degré $n-1$ avec la section tangente et un contact du degré n avec une section quelconque. En égalant dans l'équation (7) x', y' et z' à x, y et z, toutes les dérivées depuis le second degré jusqu'au degré $n-1$ seront nulles. Celle du degré n le sera aussi quand a ne sera pas égal à zéro; Z_{n+1} sera donc nul.

Si le plan est tangent, $\frac{d^n y'}{dx'^n}$ se présente sous une forme indéterminée; pour avoir sa valeur, il faut différentier l'équation (7), en y considérant cette dérivée comme constante. On a

$$(9)\qquad (n+1)\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^n y'}{dx'^n} + A_1(n-1\ldots\ldots 2) + Z'_{n+1} = 0;$$

La différentielle complète de l'équation (7) est

$$(10)\ \begin{cases}\left(q' - q - \frac{a}{z}\right)\frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}} + (n+1)\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^n y'}{dx'^n} + A_1(n-1\ldots\ldots 2)\\ \qquad\qquad + Z'_{n+1} = 0.\end{cases}$$

Faisant dans les équations (9) et (10) x', y' et z' égaux à x, y et z, on trouve pour la section tangente

$$(11)\qquad \frac{d^n y'}{dx'^n} = -\frac{Z_{n+1}}{(n+1)(s\alpha + r)},$$

et pour la section quelconque non tangente

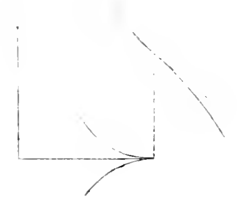
$$(12)\qquad \frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}} = \frac{\alpha}{a}Z_{n+1}.$$

On voit que la condition $Z_{n+1} = 0$, qui rendrait nul $\frac{d^n y'}{dx'^n}$ dans l'équation (11) et élèverait par conséquent au degré n le contact de l'asymptote de l'indicatrice avec la section tangente, anéantirait $\frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}}$

dans l'équation (12) et porterait au degré $n+1$ le contact de cette droite avec une section quelconque.

6. Nous avons toujours implicitement supposé que le binôme $s\alpha+t$ n'était pas nul. Dans le cas contraire, les racines de l'équation (2) seraient égales, et les deux asymptotes de l'indicatrice seraient confondues en une seule. Alors si le second terme de l'équation (4) n'était pas nul, la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ pour la section tangente serait infinie, et cette section aurait un rebroussement. Cette circonstance se présente notamment quand la méridienne d'une surface de révolution a une inflexion dont la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe (*fig.* 1).

Fig. 1.



Mais si l'équation (5) est satisfaite, la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, donnée par l'équation (4) pour la section tangente, se présentera sous une forme indéterminée. Différentiant en considérant $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ comme constant, on trouve

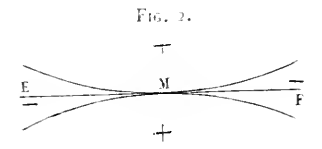
$$(13)\quad s'\left(\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)^2+\left[\begin{array}{c}(v'+w')\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\\ +2(w'+u')\frac{dy'}{dx'}+(u'+t')\end{array}\right]\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{1}{3}Z_n=0.$$

Cette équation donnera pour $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ deux valeurs qui feront connaître les rayons de courbure des projections de deux arcs tangents l'un à l'autre qui dans ce cas composent la courbe.

D'ailleurs l'équation (5), qui pourrait être écrite $Z_3=0$, montre que les sections non tangentes ont alors un contact du troisième ordre avec l'asymptote de l'indicatrice, de sorte qu'il y a une différence de

2 degrés. Mais si l'on observe que l'asymptote EF a deux contacts du

Fig. 2.

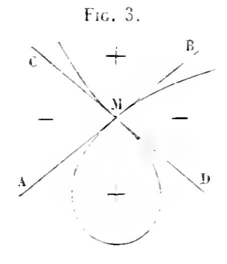


premier ordre, on reconnaîtra que la loi convenablement interprétée se vérifie encore dans ce cas-ci.

7. Quelques raisonnements géométriques tres-simples aideront à comprendre ce qui précède.

Considérons la courbe à nœud, section de la surface par son plan tangent; elle divise la surface en parties qui se réunissent angulaire-

Fig. 3.



ment au point de contact M. Les unes sont au-dessus du plan tangent, les autres au-dessous : elles sont distinguées par les signes + et —. Si une asymptote AB de l'indicâtrice ne traverse pas la branche de courbe qu'elle touche, elle aura avec elle un contact d'un ordre impair, et alors on voit que la section de la surface par le plan normal s'étendra d'un côté au-dessus du plan tangent, et de l'autre au-dessous, et, par suite, qu'elle aura avec elle un contact d'un ordre pair. L'inverse aurait lieu pour l'asymptote CD qui traverse la courbe.

Si la section par le plan tangent est formée de deux arcs ayant un contact du premier ordre avec une droite EF (*fig.* 2), asymptote unique de l'indicatrice, il est évident que la section normale faite par cette ligne a un contact d'un degré impair avec la surface.

SUR

LA SURFACE LIEU DES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX D'UNE SURFACE COURBE;

Par M. A.-H. CURTIS.

Il a été démontré par Monge que toutes les normales à une surface le long de chacune de ses lignes de courbure engendrent une surface développable, dont l'arête de rebroussement est une géodésique sur celle des deux nappes de la surface des centres qui contient les centres de courbure principaux correspondants, et que cette surface développable touche la seconde nappe de la surface des centres le long d'une courbe continue.

Il est évident, à priori, que toutes les géodésiques sur l'une ou l'autre nappe de la surface des centres qui sont engendrées de cette manière doivent posséder quelque propriété en commun, et qu'il en est de même des courbes de contact de chacune des nappes avec les développables engendrées par les normales le long des lignes de courbure du système non correspondant.

Avant de rechercher comment ces propriétés peuvent être obtenues en général, j'examinerai quelle est leur nature dans le cas particulier où la surface des centres consiste en un ellipsoïde et en un hyperboloïde confocal. Que deux surfaces de cette nature puissent devenir les deux nappes d'une surface des centres, c'est ce qui est bien connu et est évident par le fait que, si par une ligne tangente quelconque aux deux surfaces on tire les deux plans tangents, ils seront à angle droit, et cela, comme le démontre Monge, est la seule condition demandée.

La condition existante parmi les géodésiques dont nous nous occupons dans le cas actuel, est celle-ci. Si leurs équations sont écrites sous la forme connue

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = K^2,$$

la constante du second membre est la même pour le système tout entier. La même remarque s'applique à leurs équations, si elles sont écrites sous la forme

$$\mathrm{PD} = \mathrm{K}'^2,$$

car les constantes K, K′ sont dans un tel rapport, que l'une étant donnée, l'autre peut être déterminée.

Afin de prouver ce théorème, je ferai usage de l'équation du cône qui est circonscrit à une surface donnée du second degré, et dont le sommet est à un point donné. Cette équation a été obtenue pour la première fois par M. Mac-Cullagh, et peut être établie par des méthodes diverses.

La surface à laquelle le cône est circonscrit étant l'hyperboloïde, l'équation dont nous venons de parler est la suivante :

$$\frac{\cos^2 i_1}{\rho^2 - \mu_0^2} + \frac{\cos^2 i_2}{\mu^2 - \mu_0^2} + \frac{\cos^2 i_3}{\nu^2 - \mu_0^2} = 0,$$

où ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du sommet du cône ; i_1, i_2, i_3 sont les angles qu'une arête quelconque du cône fait avec les normales aux trois confocales dont les demi grands axes sont ρ, μ, ν ; et μ_0 est le demi grand axe de l'hyperboloïde. Pour trouver les arêtes de ce cône, arêtes qui sont des lignes tangentes à l'ellipsoïde (ρ) ainsi qu'à l'hyperboloïde (μ_0), il faut substituer 90 degrés à i_1, et l'on obtiendra comme équation du système de géodésiques

$$\mu^2 \cos^2 i_3 + \nu^2 \cos^2 i_2 = \mu_0^2;$$

ou

$$\mu^2 \cos^2 i_3 + \nu^2 \sin^2 i_3 = \mu_0^2,$$

ce qui, non-seulement établit le théorème énoncé plus haut, mais montre aussi que la signification géométrique de la constante K dans l'équation de la classe des géodésiques sur l'une ou l'autre nappe de la surface des centres est la moitié du grand axe de l'autre nappe.

Pour trouver quel rapport unit les courbes de contact des développables dont on a déjà parlé, supposez que AB, Bb soient deux éléments consécutifs d'une des géodésiques que nous avons examinées

ci-dessus et qui sont situées par hypothèse sur l'ellipsoïde : soient D



et E les points où ces éléments prolongés touchent l'hyperboloïde. Comme il a déjà été dit, on a

$$P_1 D_1 = K_1^2,$$

où P_1 est la perpendiculaire abaissée du centre du système confocal sur le plan BDE, qui est un plan tangent à l'hyperboloïde; D_1 est le demi-diamètre de l'hyperboloïde parallèle à AB; et K_1 est une constante. Or, comme DE est la tangente conjuguée à AD, si δ est le diamètre de l'hyperboloïde parallèle à DE, et si l'angle BDE est désigné par θ, nous aurons

$$K_1 \delta \sin\theta = P_1 D_1 \delta \sin\theta = \text{une constante},$$

cette constante étant le volume du parallélipipède formé avec les demi-axes de l'hyperboloïde. Mais K_1 est invariable aussi longtemps que D_1 est parallèle à quelque ligne tangente à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde, et par conséquent l'équation de cette seconde classe de courbes est

$$\delta \sin\theta = h,$$

h étant une constante qui est la même pour le système tout entier.

Ce résultat peut être réduit à une forme géométrique comme il suit. Si γ est le rayon de courbure de la section normale passant par un élément d'une quelconque des courbes de cette classe, nous avons

$$\gamma P_1 = \delta^2,$$

et par suite

$$\gamma P_1 \sin^2\theta = h^2.$$

Mais $\gamma \sin^2\theta$ est la distance du point D au point de la normale en D qui est le plus rapproché de la normale en E, et conséquemment, en désignant cette distance par Δ, nous obtenons

$$P\Delta = h^2;$$

Δ varie donc en raison inverse de P.

Ou bien, comme P varie en raison inverse de la portion de la normale interceptée entre D et un quelconque des plans principaux, si cette dernière ligne est représentée par N, nous apprenons que, pour toute cette classe de courbes, le rapport de Δ à N est invariable.

La méthode précédente peut être aisément étendue de manière à devenir applicable à la détermination de la propriété générale qui appartient à chacune des classes de courbes déjà mentionnées dans tous les cas où la surface des centres consiste en deux superficies distinctes.

Afin de déterminer l'équation commune du système géodésique, supposez que les équations des deux superficies soient

$$L = 0, \tag{1}$$

$$L' = 0; \tag{2}$$

alors, en désignant par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface représentée par l'équation (2), formez l'équation du cône dont le sommet est en ce point et qui est circonscrit à la surface (1). Cela peut se faire par la méthode donnée par M. Salmon [*], laquelle est une extension de la méthode de M. Joachimstal pour obtenir l'équation des lignes tangentes menées d'un point à une courbe plane quelconque. L'équation de ce cône sera de la forme

$$F(x', y', z', x - x' : y - y', y - y' : z - z') = 0,$$

et comme $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ sont proportionnels aux cosinus des angles qu'un élément des géodésiques du système dont nous parlons fait avec les axes de coordonnées, nous en concluons l'équation

$$F(x', y', z', dx' : dy', dy' : dz') = 0.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (2), déterminera complétement le système des géodésiques sur la surface représentée par l'équation (2), tandis que les mêmes résultats, *mutatis mutandis*, sont applicables à la classe semblable de géodésiques tracées sur la surface représentée par l'équation (1).

---

[*] Dans les *Transactions de l'Académie Royale irlandaise*, vol. XXIII.

L'équation commune au système conjugué peut être obtenue avec la même facilité. Supposez que AB, Bb soient deux éléments d'une des géodésiques dont nous venons de parler, sur la surface représentée par l'équation (1), et que D et E soient les points de contact de ces éléments prolongés avec la surface représentée par l'équation (2). Que les coordonnées de A et de D soient x, y, z, x', y', z'; les coordonnées doivent alors remplir les deux conditions suivantes :

$$(3) \qquad \frac{dL}{dx}(x - x') + \frac{dL}{dy}(y - y') + \frac{dL}{dz}(z - z') = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{dL'}{dx'}(x - x') + \frac{dL'}{dy'}(y - y') + \frac{dL'}{dz'}(z - z') = 0.$$

Mais, tandis que x, y, z décrit l'élément AB, x', y', z' décrit DE, qui est un élément d'une courbe de la classe dont nous cherchons l'équation; il faut donc différentier les équations (3) et (4) d'après la supposition que x, y, z, x', y', z' sont variables, et alors, ayant substitué $\lambda(x - x')$, $\lambda(y - y')$, $\lambda(z - z')$ à dx, dy, dz, éliminer λ, x, y, z entre les équations ainsi obtenues, et les équations (1), (3), (4). Le résultat sera l'équation requise, laquelle, avec l'équation (2), définit la seconde classe des courbes qui forment le sujet de ce Mémoire.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $8\mu + 3$;

PAR M. J. LIOUVILLE

Il s'agit d'un théorème dont j'ai déjà donné l'énoncé dans ce journal, à savoir que *le double d'un nombre premier de la forme $8\mu + 3$ s'exprime toujours par la somme d'un carré et du produit d'un autre carré, par un nombre premier de la forme $8\nu + 5$*. Ainsi, pour prendre les exemples les plus simples, on a

$$2.3 = 1^2 + 5.1^2, \quad 2.11 = 3^2 + 13.1^2.$$

La méthode qui m'a conduit à ce théorème (méthode que j'ai empruntée à un Mémoire de M. Bouniakowsky) repose sur un lemme, concernant la somme des diviseurs d'un nombre, dont il faut d'abord dire un mot.

Soit

$$m = 2^s.a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma$$

un nombre entier décomposé en ses facteurs premiers, et qui peut d'ailleurs être pair ou impair, s se réduisant à zéro dans ce dernier cas. La somme $\int m$, ou $\zeta_1(m)$, des diviseurs de ce nombre est égale au produit

$$(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^s)(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)\ldots,$$

dont le premier facteur est évidemment toujours impair. Quant aux autres facteurs, il est clair que comme $a, b, \ldots, c$ sont impairs, ils seront tous impairs si les exposants $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sont tous pairs, mais que si un de ces exposants est pair, le facteur correspondant sera lui-même pair. On voit donc que la valeur de $\zeta_1(m)$ ne peut être impaire que quand m est de la forme $2^s.k^2$, c'est-à-dire que quand m est un carré

ou le double d'un carré. Cette condition est à la fois nécessaire et suffisante.

Cherchons maintenant dans quel cas la valeur de $\zeta_1(m)$ est simplement paire, c'est-à-dire est de la forme $2(2\rho+1)$. Il faut évidemment pour cela que l'un des exposants $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, par exemple α, soit impair, que tous les autres soient pairs, et que de plus le facteur $1+a+\ldots+a^\alpha$, correspondant à l'exposant impair α, soit lui-même simplement pair. Or cela ne peut jamais avoir lieu si a est de la forme $4\lambda+3$, car alors $1+a$, $1+a+a^2+a^3$, etc., sont évidemment des multiples de 4; ainsi a doit être de la forme $4\lambda+1$; ajoutons que l'exposant α doit être aussi de la forme $4l+1$, et concluons enfin que $\zeta_1(m)$ est un nombre simplement pair, sous la condition nécessaire et suffisante que m soit le produit d'un nombre premier $4\lambda+1$, élevé à la puissance 1 ou $4l+1$, par un carré ou par le double d'un carré que le nombre premier $4\lambda+1$ d'abord employé ne divise pas.

On exprimerait une condition nécessaire, mais non plus suffisante, en disant que $\zeta_1(m)$ ne peut avoir une valeur simplement paire que quand m est le produit d'un carré ou du double d'un carré par un nombre premier de la forme $4\lambda+1$.

L'alternative à propos du facteur 2 n'existe plus quand le nombre m est impair. Alors, pour que $\zeta_1(m)$ soit un nombre simplement pair, il faut et il suffit que m soit le produit d'un carré par la puissance 1 ou $4l+1$ d'un nombre premier $4\lambda+1$ qui ne divise pas ce carré; il faut, par conséquent, mais il ne suffit pas que m soit le produit d'un carré par un nombre premier $4\lambda+1$.

Cela posé, je me sers de la formule suivante, qui est connue ou facile à déduire de théorèmes connus, et où $\zeta_1(m)$ continue à désigner la somme des diviseurs de m, tandis que $\zeta_3(m)$ représente la somme de leurs cubes:

$$\zeta_3(m) = \zeta_1(1)\zeta_1(2m-1) + \zeta_1(3)\zeta_1(2m-3) + \zeta_1(5)\zeta_1(2m-5) + \ldots + \zeta_1(2m-1)\zeta_1(1).$$

Le nombre m est impair; le premier membre $\zeta_3(m)$ est, je le répète, la somme des cubes des diviseurs de m, et dans le terme général du second membre,

$$\zeta_1(n)\zeta_1(2m-n),$$

n est aussi impair et varie de 1 à $2m-1$. Comme on a

$$2m = n + (2m-n),$$

et comme on sait que $\zeta_1(n)$ est le nombre des décompositions de $4n$ en une somme de quatre carrés impairs, il est visible que notre formule exprime cette vérité connue, que $\zeta_3(m)$ est le nombre des décompositions de $8m$ en une somme de huit carrés impairs.

De cette formule, on tire, en groupant les termes à égale distance des extrêmes :

$$\frac{1}{2}[\zeta_3(m)-\zeta_1(m)^2] = \zeta_1(1)\zeta_1(2m-1)+\zeta_1(3)\zeta_1(2m-3)+\ldots+\zeta_1(m+1)\zeta_1(m-1).$$

Admettons que $2m$ ne puisse pas être la somme de deux carrés, ce qui sera certainement vrai si m est un nombre premier p de la forme $8\mu-3$; alors dans le terme général

$$\zeta_1(n)\zeta_1(2m-n),$$

n et $2m-n$ ne pourront pas être à la fois des carrés, ni, par suite, les deux facteurs $\zeta_1(n)$ et $\zeta_1(2m-n)$ être à la fois impairs.

Ce terme général sera donc un nombre pair. Mais il faudra que pour certaines valeurs de n on le trouve simplement pair, si le premier membre

$$\frac{1}{2}[\zeta_3(m)-\zeta_1(m)^2]$$

de notre équation est lui-même simplement pair. On voit même qu'il faudra que le nombre des termes simplement pairs de la suite

$$\zeta_1(1)\zeta_1(2m-1)+\zeta_1(3)\zeta_1(2m-3)+\ldots+\zeta_1(m+1)\zeta_1(m-1)$$

soit lui-même impair. Or pour que le produit

$$\zeta_1(n)\zeta_1(2m-n)$$

soit simplement pair, il faut que l'un des facteurs $\zeta_1(n)$, $\zeta_1(2m-n)$ soit simplement pair et que l'autre soit impair. Il faut donc que des deux nombres impairs, n et $2m-n$, l'un soit un carré et l'autre le

produit d'un carré par la puissance 1 ou $4l+1$ d'un facteur premier de la forme $4\lambda+1$ qui ne divise pas ce carré.

Les deux conditions que nous exigeons, à savoir que $2m$ ne puisse pas être la somme de deux carrés, et que

$$\frac{1}{2}[\zeta_3(m)-\zeta_1(m)^2]$$

soit un nombre simplement pair, sont remplies en prenant pour m un nombre premier p de la forme $8\mu+3$. Cela est évident pour la première condition et le devient pour la seconde, en observant qu'on a alors

$$\zeta_3(m)=1+(8\mu+3)^3,\quad \zeta_1(m)=1+(8\mu+3),$$

d'où

$$\frac{1}{2}[\zeta_3(m)-\zeta_1(m)^2]=2(8\mu+3)(16\mu^2+10\mu+1).$$

Il est donc prouvé que le double $2p$ de tout nombre premier $8\mu+3$ s'exprime par la formule

$$2p=x^2+qy^2,$$

q désignant un nombre premier $4\lambda+1$ qui, s'il divise y, doit y entrer comme facteur avec un exposant pair. Puisque p est impair, x et y sont impairs, et λ aussi doit l'être, sans quoi l'on aurait $x^2+qy^2\equiv 2 \pmod{8}$, tandis que $2p$ est $\equiv 6 \pmod{8}$. Donc q est de la forme $8\nu+5$, et notre théorème est démontré. Il est établi en outre que le nombre des décompositions de $2p$, sous la forme citée, est nécessairement impair.

C'est ainsi que l'on a pour 2.19, c'est-à-dire pour le nombre 38, les trois décompositions que voici :

$$1^2+37.1^2,\quad 3^2+29.1^2,\quad 5^2+13.1^2.$$

Le lemme concernant la fonction $\zeta_1(m)$, qui fournit les conditions sous lesquelles $\zeta_1(m)$ est un nombre impair ou un nombre simplement pair, a ses analogues pour d'autres fonctions numériques. Ainsi la fonction $\varphi(m)$, qui marque le nombre des entiers premiers à m contenus dans la suite $1, 2, 3, \ldots, m$, ne peut avoir une valeur impaire que quand $m=1$ ou 2, et une valeur simplement paire que quand

m est égal à 4 ou est de l'une des deux formes a^{α}, $2a^{\alpha}$, a désignant un nombre premier de la forme $4\mu + 3$. On peut encore citer les fonctions $\zeta_2(m)$, $\zeta_3(m)$, etc., qui expriment la somme des carrés, la somme des cubes, etc., des diviseurs de m, la fonction $\zeta_0(m)$ qui exprime leur nombre, et une foule d'autres fonctions que l'on peut même créer à volonté pour le besoin des problèmes dont on s'occupe. Cette remarque si simple (que je pourrai développer une autre fois par de nombreux exemples) agrandit singulièrement le champ des questions auxquelles la méthode de M. Bouniakowsky s'applique.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT

AUX

RECHERCHES NOUVELLES SUR LES PORISMES D'EUCLIDE.

Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Vincent des textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Dans le *Post-scriptum* placé à la suite du *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* [*], j'ai annoncé que je répondrais à la *Notice* publiée sur le même sujet par M. Vincent. L'éminent helléniste a publié depuis une *seconde Notice sur les Porismes*. Je me propose de traiter ici avec détail les diverses questions soulevées par ces deux écrits [**].

La partie essentielle du travail de M. Vincent est sa traduction nouvelle des textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes, qu'il oppose à la mienne et qui en diffère en une foule d'endroits, tant pour la forme que pour le fond. Il n'est pas difficile de voir, en les compa-

---

[*] Je rappelle que les *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* ont été insérées dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XX. Le *Supplément* a paru dans le même recueil, 2e série, t. II, sous ce titre : *Observations sur le Mémoire de M. Housel intitulé : les Porismes d'Euclide.* Le titre principal : *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*, a été omis. Il n'existe que sur les exemplaires tirés à part.

[**] La *première Notice* de M. Vincent a été publiée dans le no 10 du journal *la Science*, année 1857, 1er février; mes *Objections* ont été insérées les 2, 5, et 9 avril suivant dans les nos 27, 28 et 29 du même journal; enfin la *seconde Notice* de M. Vincent a paru les 17 et 21 mai, même année, dans les nos 40 et 41.

rant l'une à l'autre, qu'il ne s'agit de rien moins qu'une *cinquantaine de contre-sens* (pour ne pas parler d'autres défauts), qui se trouveraient dans ma traduction, si celle de M. Vincent était exacte. Aussi a-t-il d'abord déclaré tout net que j'avais fait fausse route. Mais il me sembla que je pouvais sans trop de témérité ne point souscrire à cette condamnation si formelle de mes idées. En effet, les traductions que M. Vincent donnait des définitions du *théorème* et du *problème*, qu'on trouve dans Pappus immédiatement avant la première définition du *Porisme*, et sur le sens desquelles il est impossible de se tromper, étaient évidemment inadmissibles. Celle qu'il donnait ensuite de la première définition du *Porisme* n'avait rien de commun avec le texte, ni pour le sens, ni même pour les termes. Et s'il traduisait la seconde *mot à mot*, il y ajoutait une *interprétation* qui ne pouvait en aucune façon satisfaire le sentiment des choses géométriques. D'après ces remarques et d'autres encore, il me parut certain que M. Vincent devait s'être laissé entraîner par quelque idée préconçue, et je crus convenable, avant de publier ce que j'avais à dire pour la justification de mon travail, d'appeler l'attention sur plusieurs parties du sien, desquelles il me semblait résulter que c'était lui-même qui se trompait. C'est pour répondre aux *Objections* que je présentai alors, qu'il a publié sa *seconde Notice*. Le savant helléniste avoue qu'il s'est trompé sur quelques points, mais il maintient *l'ensemble* de son interprétation, voulant bien reconnaître toutefois que j'ai donné une première approximation, au lieu de m'être complétement fourvoyé, comme il le disait d'abord; et il croit avoir fourni une seconde approximation d'après la mienne, ou, en d'autres termes, s'être approché du but plus que moi. Or il ne m'est pas possible de m'en tenir à cette concession : avec des manières de voir aussi opposées, si l'un de nous s'est approché du but, l'autre a dû nécessairement s'en écarter tout à fait. C'est ce dont on jugera par la discussion qui va suivre.

Au surplus, le présent article n'est pas seulement une justification de ce que j'ai avancé dans le Mémoire attaqué par M. Vincent, mais encore un appel *à M. Vincent mieux informé*. On verra en effet, par diverses remarques, qu'il avait condamné ce travail avant d'en avoir pris une entière connaissance. Croyant ma traduction tout à fait défectueuse, il a cru sans doute pouvoir se dispenser de lire le com-

mentaire dans lequel je m'étais efforcé de l'éclaircir et de la rendre plausible.

Pour mettre le lecteur à même de suivre plus facilement la discussion, je donne ci-dessous, l'une à côté de l'autre, la traduction de M. Vincent et la mienne, en faisant toutefois profiter celle-ci des rectifications que j'ai proposées dans le § IV du *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, et en y apportant diverses améliorations de détail, dont quelques-unes ont pour objet de faire droit à celles des observations de mon savant adversaire dont j'ai reconnu la justesse. On les trouvera indiquées dans les annotations qui font suite à ces deux traductions. Je suppose, bien entendu, que le lecteur a sous les yeux ma première traduction et les textes grecs dont elle est accompagnée.

Notice de Pappus sur les Porismes.

TRADUCTION DE M. BRETON.

« Après les *Contacts*, viennent les *Porismes* d'Euclide, en trois livres, recueil disposé avec l'art le plus ingénieux (*a*), tant pour la résolution des problèmes difficiles que pour la découverte des conséquences des hypothèses (*b*), et présentant, à cet effet, beaucoup de choses qui de leur nature s'offrent en abondance illimitée (*c*). Il n'en a toutefois été ajouté aucune à celles qu'Euclide le premier a formulées, si ce n'est par certains [géomètres] qui, avant nous, ont mal à propos opposé de secondes formules à celles d'un petit nombre de ces choses, chacune [de ces choses] étant à la vérité présentée un certain nombre de fois, comme nous l'expliquons (*d*), mais Euclide ne donnant de chacune d'elles qu'une seule formule qui en est l'expression la plus claire (*e*). La théorie en est fine et naturelle, et nécessaire et très-générale, et elle fait les délices de ceux qui savent voir et trouver (*f*). Leurs diverses espèces ne sont, quant à l'apparence, ni des théorèmes ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le milieu entre les deux; de telle façon qu'il est facultatif (*g*) d'en mettre les énoncés sous la forme qui con-

TRADUCTION DE M. VINCENT.

« Après les *Contacts*, il y a les Porismes d'Euclide, en trois livres, recueil très-riche en artifices variés (*a*), tout préparés pour la solution des problèmes les plus difficiles ainsi que pour les constructions (*b*), toutes choses qui, de leur nature, se présentent en foule innombrable (*c*). On n'a rien ajouté aux écrits primitifs qui sont dus à Euclide, si ce n'est que plusieurs de nos devanciers se montrant en cela peu judicieux, ont appliqué de nouvelles rédactions sur quelques-unes des siennes; mais chaque porisme étant susceptible d'un certain nombre de démonstrations, comme nous l'avons fait voir (*d*), Euclide avait choisi, pour chacun d'eux, la plus simple et la plus lumineuse (*e*). Quoi qu'il en soit, les porismes présentent une théorie subtile, naturelle cependant, nécessaire même, du reste très-générale, et bien faite pour plaire à ceux qui savent apercevoir et déduire des conséquences (*f*). Les diverses espèces de porismes ne sont entièrement ni des théorèmes ni des problèmes; ils ont plutôt une forme intermédiaire, mais de telle sorte que leurs énoncés peuvent être présentés (*g*) comme appartenant, soit à des

TRADUCTION DE M. BRETON.

vient aux théorèmes aussi bien que sous celle qui convient aux problèmes ; d'où il est résulté que, de beaucoup de géomètres, les uns estiment qu'elles appartiennent au genre des théorèmes, tandis que d'autres, ne tenant compte que de la forme des énoncés (h), les considèrent comme appartenant au genre des problèmes.

» Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues des Anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions ; car ils disaient que le théorème est une vérité que l'on énonce et qu'il faut rendre évidente par une démonstration (i), tandis que le problème est un but que l'on propose et qu'il s'agit d'atteindre par une construction (j) : mais que le Porisme est une chose dont la découverte est proposée (k). Cette définition du Porisme a été changée (l) par les modernes (m), lesquels, hors d'état de trouver tout [ce qui est proposé] (n), mais se prévalant de ce qu'ils voyaient dans ces éléments [des Porismes] (o) et se bornant à y montrer l'une quelconque des choses cherchées (p) sans la trouver [par eux-mêmes] (q), ont, par suite, sans tenir compte de la définition [précitée] (r) et de ce qui est enseigné (s), écrit ceci d'après ce qui arrive [en effet aux Porismes] (t) : « Le Porisme est ce qu'il » faut ajouter à l'hypothèse [pour que celle- » ci devienne l'énoncé] d'un théorème local » (u). » Dans ce genre de Porismes (v), les Lieux sont compris comme espèce, et ils abondent (x) dans les résultats des recherches (y). Ceux des Porismes [qui ne sont pas des lieux] étant mis à part (z), cette espèce est réunie sous un titre particulier et donnée séparément (a'), à cause qu'elle est beaucoup plus nombreuse que les autres. En effet, parmi les lieux, les uns sont *plans*, d'autres *solides*, d'autres *linéaires*, et il y a en outre ceux *aux moyennes* (b').

» Il arrive encore aux Porismes ceci, de présenter des énoncés très-peu explicites, où plusieurs choses sont ordinairement sous-en-

TRADUCTION DE M. VINCENT.

théorèmes, soit à des problèmes. Par suite, il arrive aussi que beaucoup de géomètres, n'ayant égard qu'à la forme des énoncés (h), supposent, les uns, que ces sortes de propositions sont des théorèmes, les autres, que ce sont des problèmes.

» La différence de ces trois choses était mieux connue des Anciens, comme le prouvent les définitions qu'ils en donnent. Ils disaient, en effet, que le théorème est un raisonnement fait pour démontrer une proposition énoncée (i), que le problème est une opération faite pour exécuter une construction proposée (j), et qu'enfin le Porisme est ce qu'on ajoute pour mettre à profit un résultat obtenu (k). Cette définition du Porisme a été modifiée (l) par certains géomètres modernes (m), peu capables de tirer parti des connaissances acquises (n) et de s'élever au-dessus des simples éléments (o), obligés ainsi de se renfermer dans l'évidence des seuls points mis en question (p), mais sans pouvoir en faire aucune application (q) : de sorte que, s'appuyant d'ailleurs sur la définition (r) et sur la théorie (s), ils ont avancé, d'après les circonstances signalées ci-dessus (t), que « le Porisme est ce qui » manque à l'hypothèse d'un théorème local (u). » En effet, dans le genre des Porismes (v), il y a ce que l'on nomme les *Lieux*. Aussi les porismes abondent-ils (x) dans le livre intitulé : *Lieux communs de l'analyse* (y) ; mais en les mettant à part (z), on a pu en former un recueil auquel on a donné un titre particulier et qui a reçu une plus grande publicité, vu l'abondance relative de cette espèce de questions comparativement aux autres. Quant aux Lieux en général, ils se rapportent les uns aux plans, les autres au solides, d'autres encore aux lignes, et d'autres enfin aux moyennes (b').

» Ce n'est pas tout, et il arrive encore ceci aux porismes : c'est de présenter des énoncés tronqués, à cause de la diversité, de la va-

TRADUCTION DE M. BRETON.

tendues, ce qui est une cause d'incertitude (c'); de sorte que beaucoup de géomètres ne saisissent qu'en partie ce dont il s'agit, et que ce qu'il y a de plus essentiel leur échappe (d').

» Quant à réunir un grand nombre de propositions dans un seul énoncé (e'), cela n'est guère possible dans les Porismes (f'), parce qu'Euclide lui-même n'en donne pas beaucoup de chaque espèce (g'), mais seulement un ou peu comme échantillons pris dans le grand nombre (h'). Cependant (i') on trouve au commencement du premier livre plusieurs propositions analogues entre elles, appartenant à cette espèce des *lieux* plus abondamment répandue que les autres; leur nombre s'élève à dix (j'). C'est pourquoi, trouvant possible de les comprendre dans un seul énoncé, nous écrivons celui-ci comme il suit :

« Si dans un système de quatre droites
» tel, que, deux d'entre elles formant un
» angle, les deux autres se coupent dans
» l'intérieur de cet angle ou à l'extérieur ou
» bien soient parallèles (k'), trois de leurs
» points d'intersection sont rendus fixes sur
» l'une d'elles ou deux seulement sur l'une des
» droites parallèles dans le dernier cas, et
» que les points restants, un seul excepté,
» soient assujettis à demeurer chacun sur
» une droite fixe (l'), le dernier point de-
» meurera pareillement sur une droite fixe
» (m'). »

» Il ne s'agit ici que de quatre droites (n') telles, que pas plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de droites, de cette manière : « Tant de droites qu'on voudra se
» coupant les unes les autres, mais pas plus
» de deux en un même point, si tous les
» points où l'une d'elles est rencontrée par
» les autres sont fixes, et que chacun des

TRADUCTION DE M. VINCENT.

riété inhérentes au grand nombre des choses qui y sont communément sous-entendues (c'), d'où il suit que beaucoup de géomètres, ne les considérant que sous une partie de leurs faces, laissent de côté des points très-essentiels de leur constitution (d').

» En effet, d'un énoncé unique faire ressortir de nombreuses propriétés (e'), c'est une chose absolument impossible en ces matières (f'), et c'est pourquoi Euclide lui-même n'a pas multiplié les développements dans chaque groupe (g'), mais s'est contenté de présenter, à titre d'exemple, un seul cas ou tout au plus quelques-uns choisis sur la totalité (h'). C'est ainsi que (i'), pour base des données de son premier livre, il prend des propositions analogues entre elles, tirées de cette espèce de lieux si abondante qui lui en fournit une dizaine (j'), et dont nous-même, ayant trouvé qu'il était possible de comprendre tous ces énoncés dans un seul, nous avons rédigé la formule comme il suit :

« Etant données quatre droites se coupant
» deux à deux, de manière que l'une étant
» couchée dans un sens, l'autre soit cou-
» chée en sens contraire, ou lui soit paral-
» lèle (k') : si trois points sont donnés sur
» l'une d'elles, ou deux seulement dans le
» cas du parallélisme, et que les autres,
» moins un, soient situés chacun sur une
» droite donnée (l'), le dernier sera égale-
» ment situé sur une droite donnée (m'). »

» Il ne s'agit ici que de quatre droites (n') telles, que pas plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de droites, de cette manière : « Tant de droites que l'on voudra
» se coupant les unes les autres, mais pas
» de deux en un même point : si tous les
» points où l'une d'elles est rencontrée par
» les autres sont donnés, chacun des points

TRADUCTION DE M. BRETON.

» points où l'une de ces dernières est cou- » pée par l'une des droites restantes soit » assujetti à demeurer sur une droite fixe » (o'); ou plus généralement : tant de droi- » tes qu'on voudra se coupant les unes les » autres, mais pas plus de deux en un même » point, si tous les points où l'une d'elles » est rencontrée par les autres sont fixes, » et que parmi les points d'intersection de » ces dernières, lesquels forment un nombre » triangulaire, il s'en trouve autant d'assu- » jettis à demeurer chacun sur une droite » fixe (p') qu'il y a d'unités dans le côté » de ce nombre, de telle sorte que trois » de ces points ne puissent être les sommets » de l'un des triangles [formés par les droites » mobiles] (q'), chacun des points d'inter- » section restants sera pareillement assujetti » à demeurer sur une droite fixe (r'). »

» Il est vraisemblable que l'auteur des *Éléments* n'ignorait pas cette extension, mais n'a fait qu'en poser le point de départ. Et il paraît avoir répandu dans tous ses Porismes les principes et les germes seulement (s') de nombreuses et grandes foules [de propositions] (t'). Il faut distinguer chacune [de ces foules] non pas par les différences des hypothèses, mais par celles des choses qui arrivent ou sont cherchées (u'). Car les hypothèses diffèrent toutes les unes des autres, étant très-particulières, mais chacune des choses qui arrivent ou qui sont cherchées se présente unique et la même dans plusieurs hypothèses différentes (v').

» Voici en conséquence, pour le premier livre, le genre des choses cherchées dans les propositions (x') (la figure est au commencement du n° 7) (y') :

« Si de deux points fixes on mène deux » droites se coupant sur une droite fixe, et » que l'une d'elles retranche d'une droite » fixe un segment à partir d'un point donné » sur cette dernière, la seconde retranchera

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» où l'une de ces dernières est rencontrée » par les droites restantes se trouve en même » temps sur une droite donnée (o'). Ou, plus » généralement : Tant de droites que l'on » voudra se coupant les unes les autres, » mais pas plus de deux en un même point : » si tous les points où l'une d'elles est ren- » contrée par les autres sont donnés, et que » parmi les points d'intersection de ces der- » nieres, lesquels forment un nombre trian- » gulaire, on en considère autant qu'il y a » d'unités dans le côté de ce nombre trian- » gulaire : Si ces derniers points sont situés » chacun sur une des droites restantes (p') » [de telle manière que trois d'entre elles » ne puissent passer par un seul point (q')], » chacun des points d'intersection restants » sera situé aussi sur une droite donnée (r'). »

» Il n'est cependant pas vraisemblable que l'auteur des *Éléments* ignorât cette extension : mais il aura voulu se borner à établir une base. Et en effet (c'est une remarque générale qui ressort de tous ses porismes), il n'a évidemment cherché qu'à poser les principes et à répandre la semence d'une foule de belles propositions (t'), lesquelles d'ailleurs doivent être soigneusement distinguées, non pas d'après la diversité des hypothèses, mais d'après celle des résultats obtenus, soit que ceux-ci se présentent d'eux-mêmes, soit qu'ils proviennent de recherches expresses (u'). Or, toutes les hypothèses diffèrent entre elles par des aspects très-divers, tandis que chacun des résultats trouvés ou recherchés se présente unique et identique pour plusieurs hypothèses différentes (v').

» Voici donc, pour le premier livre, les genres des choses que l'on cherche à déduire des propositions (x'') (*voir* la figure au commencement du lemme 7) (y') :

« Si de deux points donnés on mène deux » droites qui se coupent sur une droite don- » née de position, et que l'une d'elles inter- » cepte sur une droite donnée de position » un segment mesuré à partir d'un point

TRADUCTION DE M. BRETON.

» aussi sur une autre [droite fixe à partir
» d'un point donné sur cette droite] (z') un
» segment qui sera au premier dans un rap-
» port constant. »

» Et ensuite :

« Que tel point décrit une droite donnée
» de position (a'').

» Que le rapport de telle droite à telle
» autre est constant (b'').

» Que le rapport de telle droite à une ab-
» scisse qu'elle détermine est constant (c'').

» Que telle droite est donnée de direc-
» tion (d'').

» Que telle droite passe par un point fixe.

» Que telle droite a un rapport constant
» avec le segment compris entre tel point et
» un point fixe (e'').

» Que telle droite a un rapport constant
» avec une autre droite menée de tel point
» variable.

» Que tel espace a un rapport constant
» avec le rectangle qui a pour côtés une
» certaine droite variable et une droite don-
» née (f'').

» Qu'une portion de tel espace [variable]
» est donnée, tandis que l'autre varie propor-
» tionnellement à une certaine abscisse (g'').

» Que tel espace variable, pris seul ou avec
» un espace donné.... a un rapport constant
» avec une certaine abscisse.

» Que telle droite variable, plus une autre
» droite proportionnelle à une seconde droite
» variable, est dans un rapport constant avec
» le segment compris entre tel point et un
» point fixe.

» Que le triangle qui a pour sommet un
» point fixe et pour base telle droite varia-
» ble, est équivalent au triangle qui a pour
» sommet un autre point fixe et pour base
» le segment compris entre tel point et un
» point fixe.

» Que la somme de deux droites variables

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» donné sur sa direction, l'autre droite in-
» terceptera aussi sur la précédente (z') un
» segment qui sera au premier dans un rap-
» port donné. »

» Puis ensuite :

« 1°. Que tel point est situé sur une droite
» donnée de position (a'').

» 2°. Que le rapport de telle droite à telle
» autre est donné (b'').

» 3°. Que telle droite est partagée suivant
» la section de raison (c'').

» 4°. Que telle droite est donnée de posi-
» tion (d'').

» 5°. Que telle droite passe par un point
» donné.

» 6°. Qu'il y a rapport commensurable
» entre telle droite et un segment compris
» entre tel point et un point donné (e'').

» 7°. Qu'il y a rapport commensurable
» entre telle droite et un certain segment
» abaissé de tel point.

» 8°. Qu'il y a rapport commensurable
» entre tel espace et le rectangle qui a pour
» côtés une droite donnée et telle autre
» droite (f'').

» 9°. Que tel espace [est décomposable
» en deux parties dont] l'une est donnée et
» dont l'autre est suivant la section d'es-
» pace (g'').

» 10°. Que tel espace, pris seul ou avec
» un certain espace, est [décomposable en
» deux parties dont l'une est donnée et dont]
» l'autre est suivant la section d'espace.

» 11°. Que telle droite, plus une autre
» droite avec laquelle telle autre droite est
» dans un rapport donné, est elle-même dans
» un rapport commensurable avec un cer-
» tain segment compris entre tel point et
» un point donné.

» 12°. Que le triangle qui a pour sommet
» un point donné et pour base telle droite,
» est équivalent au triangle qui a pour som-
» met un point donné et pour base le seg-
» ment compris entre tel point et un point
» donné.

» 13°. Qu'il y a rapport commensurable

TRADUCTION DE M. BRETON.

» a un rapport constant avec le segment » compris entre tel point et un point donné.

« Que telle droite détermine sur des droi- » tes données des segments dont le produit » est constant. »

« Dans le second livre, les hypothèses sont autres que dans le premier, mais le plus grand nombre des choses cherchées sont les mêmes, et, en outre, il y a celles-ci :

« Que tel espace variable ou la somme de » cet espace et d'un espace donné est en » raison constante avec une certaine ab- » scisse.

» Que le rectangle qui a pour côtés telle » droite variable et telle autre droite va- » riable est en raison constante avec une » certaine abscisse.

» Que le rectangle qui a pour côtés la » somme de deux droites variables et la » somme de deux autres droites variables » est en raison constante avec une certaine » abscisse.

» Que la somme du rectangle qui a pour » côtés telle droite variable et la même » droite augmentée d'une autre droite pro- » portionnelle à une droite variable, et le » rectangle qui a pour côtés telle droite et » telle autre, cette dernière étant propor- » tionnelle à une droite variable, est en rai- » son constante avec une certaine abscisse.

» Que la somme de ces deux rectangles » est en raison constante avec une certaine » droite comprise entre tel point et un point » donné.

» Que le rectangle de telle droite variable » et de telle autre droite variable est con- » stant. »

» Dans le troisième livre, le plus grand nombre des hypothèses ont pour objet le demi-cercle, et quelques-unes le cercle entier et les segments. Des choses cherchées, beaucoup sont à peu près semblables à celles indiquées ci-dessus. Il y a en outre celles-ci :

« Que le rectangle de deux droites va-

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» entre la somme de telle droite ajoutée à » telle autre droite, et un certain segment » compris entre tel point et un point donné.

» 14°. Que telle droite détermine, sur des » droites données de position, des segments » qui comprennent un espace donné. »

» Dans le second livre, ce sont d'autres hypothèses. Quant aux choses cherchées, la plupart sont les mêmes que dans le premier livre; mais il y a de plus les suivantes :

« 1°. Que tel espace, ou la somme de cet » espace et d'un espace donné, est suivant » la section d'espace.

» 2°. Que le rectangle qui a pour côtés » telle droite et telle autre droite est suivant » la section d'espace.

» 3°. Que le rectangle qui a pour côtés » la somme de deux droites et la somme de » deux autres droites est suivant la section » d'espace.

» 4°. Que deux rectangles, dont le pre- » mier est construit sur telle droite et telle » droite augmentée d'une troisième droite » qui est avec une quatrième dans un rap- » port donné, et dont le second est construit » sur telle droite et celle qui est dans un » rapport donné avec la précédente, forment » une somme qui est suivant la section d'es- » pace.

» 5°. Qu'il y a rapport commensurable » entre la somme de ces deux rectangles et » une certaine droite comprise entre tel point » et un point donné.

» 6°. Que le rectangle de telle droite et de » telle autre droite est donné. »

» Dans le troisième livre, le plus grand nombre des hypothèses sont relatives au cercle; quelques-unes regardent le cercle et les segments. Pour les choses cherchées, la plupart ressemblent aux précédentes : mais il y a celles-ci en plus :

« 1°. Qu'il y a rapport commensurable

TRADUCTION DE M. BRETON.

» riables est au rectangle de deux autres
» droites variables dans un rapport constant.

» Que le quarré construit sur telle droite
» est en rapport constant avec une certaine
» abscisse.

» Que le rectangle de deux droites variables est dans un rapport constant avec le rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment compris entre tel point variable et un point donné.

» Que le quarré construit sur telle droite est dans un rapport constant avec le rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment déterminé sur une droite fixe, à partir d'un point donné, par la perpendiculaire abaissée sur cette droite.

» Que le rectangle qui a pour côtés la somme de deux droites variables et une droite proportionnelle à une autre droite variable est dans un rapport constant avec une certaine abscisse.

» Qu'il existe un point tel, que les droites menées de ce point à deux points variables comprennent un triangle donné d'espèce (h'').

» Qu'il existe un point tel, que les droites menées de ce point à deux points variables interceptent des arcs égaux (i'').

» Que telle droite est parallèle à une autre droite passant par un point fixe, ou fait avec cette dernière un angle constant (k''). »

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» entre le rectangle construit sur telle et telle droite et le rectangle construit sur telles autres droites.

» 2°. Que le carré construit sur telle droite est suivant la section d'espace.

» 3°. Que le rectangle de telle droite avec une autre droite [est égal] au rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment compris entre tel point et un point donné.

» 4°. Que le carré construit sur telle droite [est égal] au rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment déterminé, à partir d'un point donné, par une [certaine] perpendiculaire.

» 5°. Que le rectangle construit sur la somme de deux droites, d'une part, et, d'autre part, telle droite qui a un rapport donné avec telle autre droite, est lui-même suivant la section d'espace.

» 6°. Qu'il existe un point donné tel, que les droites menées de ce point à deux points donnés comprennent un triangle donné d'espèce (h'').

» 7°. Qu'il existe un point donné tel, que les droites menées de ce point à deux points donnés interceptent des arcs égaux (j'').

» 8°. Que telle droite est parallèle à une certaine droite passant par un point donné ou fait avec elle un angle donné (k'').

Passages extraits de Proclus.

« ... *Porisme* se dit de certains problèmes, tels que les Porismes d'Euclide ; mais il se dit plus particulièrement lorsque, de choses que nous avons démontrées, il en surgit quelque autre qui est un théorème que nous n'avions pas énoncé et que pour cela on a appelé *porisme* (l''), lequel est comme un gain fait dans la démonstration pour laquelle nous avons établi l'évidence de ces choses. »

« ... *Porisme* est un terme de géométrie.

« ... Quant au mot *porisme*, il se dit [en général] de certains problèmes, comme le *Traité des porismes*, composé par Euclide. Mais il se dit plus particulièrement lorsque, des choses démontrées précédemment, il surgit quelque théorème qui n'avait point été proposé, et que, pour cela même, on nomme *porisme* (l''), comme étant assimilé à un gain, à un bénéfice accessoire de la démonstration régulière et scientifique.... »

« ... Le mot *porisme* est un des termes

TRADUCTION DE M. BRETON.

Il a une double acception : car on appelle Porismes et ces théorèmes qui se présentent dans la démonstration d'autres théorèmes comme une heureuse trouvaille et un gain dont on profite chemin faisant (m''), et ces choses que l'on recherche (n''), et dont la découverte exige de l'invention (o'') et non pas seulement déduction (p'') et raisonnement facile (q'').

» L'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle est l'objet d'un théorème (r''), et telle est la connaissance que nous avions des choses qui *sont* (s''). Partager un triangle en deux parties égales ou construire un triangle, retrancher une droite d'une autre ou l'ajouter, toutes ces choses se réduisent à quelque opération. Mais, un cercle étant donné, en trouver le centre, ou bien, deux grandeurs commensurables étant données, en trouver la plus grande commune mesure, ces choses et une infinité d'autres, tiennent en quelque sorte le milieu entre les problèmes et les théorèmes : car ces questions se résolvent non par simple déduction (t''), mais par invention (u'') et non par un raisonnement exempt de difficulté (v''). Il faut découvrir la chose demandée et la rendre évidente par une construction (x''). Tels sont les Porismes qu'Euclide a donnés dans les livres de problèmes qu'il a composés (y''). Mais ne nous arrêtons-pas à parler de ces Porismes-là (z'').

TRADUCTION DE M. VINCENT.

qu'emploie la géométrie ; il a une double signification. On nomme *porismes*, d'abord, des théorèmes qui se trouvent implicitement préparés par la démonstration de quelques autres, et qui sont, pour ainsi dire, des gains éventuels et des bénéfices dont on profite en passant (m'') ; en second lieu, des notions comprises implicitement dans l'objet d'une question (n''), mais où il y a cependant quelque chose de particulier à inventer (o'') : de sorte qu'il ne s'agit dans ce cas ni d'une construction proprement dite (p'') ni d'une simple théorie (q'').

« Par exemple que *dans les triangles isocèles les angles à la base soient égaux*, c'est là simplement une affaire de théorie (r'') et dont il ne s'agit que d'acquérir la connaissance comme de toutes les choses qui sont (s''). D'un autre côté, la bissection d'un angle, la construction d'un triangle, une addition ou une soustraction, tout cela n'exige qu'une opération dont le but est déterminé. Mais, au contraire, « Un cercle étant donné, en » trouver le centre, » ou bien : « Deux gran- » deurs commensurables étant données, en » trouver la plus grande commune mesure : » toutes les questions de ce genre tiennent, en quelque sorte, le milieu entre les problèmes et les théorèmes. En effet, ce ne sont pas ici des créations (t''), quoiqu'il y ait quelque chose à trouver (u'') ; et ce ne sont pas non plus des théorèmes abstraits (v'') puisqu'il faut offrir à la vue, représenter devant les yeux l'objet de la question (x''). Or tel est le genre des propositions nommées *porismes* et traitées par Euclide dans les livres de Problèmes qu'il a composés (y'') ; mais il n'y a pas lieu de parler ici de cette espèce de *porismes*.

OBSERVATIONS SUR LES DEUX TRADUCTIONS QUI PRÉCÈDENT.

1°. *Notice de Pappus sur les Porismes.*

(a) M. Vincent traduit πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον par *recueil*

très-riche en artifices variés. Il ne me semble pas que ce soit là le véritable sens. On trouve en effet, un peu plus loin, que la théorie mise en usage dans ce recueil offrait un caractère de *généralité* qui ne paraît guère compatible avec cette supposition que le *Traité des Porismes* était un recueil *d'artifices variés.* Le terme φιλοτεχνότατον indique plutôt l'art ingénieux avec lequel Euclide l'avait composé. C'est ce que j'ai essayé de rendre dans ma nouvelle traduction.

(*b*) J'ai remplacé γενῶν par γενομένων, parce que le premier de ces mots n'offre aucun sens géométrique. M. Vincent ne croit pas devoir suivre cette correction, et il traduit γενῶν par *constructions.* Il fait observer à ce sujet que ce mot est employé en plusieurs endroits de la *Notice* de Pappus *sur les Porismes*, « où il indique évidemment les diverses variations que peut subir l'énoncé d'une question, les genres divers des choses demandées et dépendant soit de la solution du même problème, soit des différentes propriétés d'une même figure. » La vérité est que ces endroits sont au nombre de *trois*. On trouve d'abord γένει dans le sens de *genre;* il s'agit de la question qui s'était élevée, de savoir si les propositions de l'ouvrage d'Euclide appartenaient au *genre* des théorèmes ou à celui des problèmes. On rencontre ensuite γένους, employé pour désigner le *genre* de Porismes auquel s'appliquait la seconde définition du Porisme. Enfin Pappus se sert de γένη pour indiquer les *genres* divers des choses cherchées. Or dans aucun de ces trois cas il ne s'agit de *constructions*. C'est donc tout à fait arbitrairement que M. Vincent traduit γενῶν par *constructions*.

Je persiste à proposer de lire γινομένων, qui est un terme à l'usage de Pappus. *Voyez* sur ce point le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 2°.

(*c*) La fin de la première phrase, ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος, se rapporte non point, comme M. Vincent le suppose, aux questions dont le *Traité des Porismes* était destiné à procurer ou à faciliter la solution, mais à la matière même des Porismes, qui, de sa nature, est inépuisable. Les problèmes de la *section de raison*, de la *section de l'espace*, de la *section déterminée* et des *contacts*, sur lesquels roulent autant de notices données par Pappus avant de parler des Porismes, sont des sujets essentiellement *circonscrits*, et dont la ma-

tière a été, pour ainsi dire, épuisée par Apollonius. Or, il n'en est pas de même pour les *Porismes*, et c'est ce que Pappus fait remarquer naturellement. M. Vincent lui fait remplacer cela par un lieu commun et dire une chose qui n'apprendrait rien à personne. La pensée de Pappus est au surplus mise en évidence par le commencement de la phrase suivante : οὐδὲν προστεθείκασι, etc., où le mot οὐδὲν est pour οὐ δὲ ἕν, *mais pas une*, etc. ; on voit qu'il insiste sur cette circonstance que, malgré l'abondance illimitée de la matière des Porismes, on n'avait ajouté aucun Porisme à ceux que renfermait l'ouvrage d'Euclide. Les géomètres avaient toutefois donné divers lemmes pour les Porismes.

(*d*) M. Vincent fait observer avec raison que les manuscrits donnent l'*aoriste* ἐδείξαμεν. Mais ce temps s'emploie souvent au lieu du *présent*, j'ai substitué en conséquence le *présent* au *futur* dans ma traduction, ce qui d'ailleurs ne change pas le sens.

(*e*) Pour la signification des termes γραφή et ἀπόδειξις employés dans cette phrase, *voyez* le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 3°. M. Vincent suppose que μίαν se rapporte à ἀπόδειξιν. Or μίαν est évidemment opposé à δευτέρας, et conséquemment se rapporte à γραφήν. J'avais déja fait cette remarque dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes*. *Voyez*, dans le *Commentaire*, la note du § I.

(*f*) Ces expressions *apercevoir et déduire des conséquences* s'éloignent de la signification des termes ὁρᾶν καὶ πορίζειν, lesquels marquent la double aptitude dont il fallait être pourvu pour comprendre ces méthodes d'Euclide, dont Pappus fait un si remarquable éloge. Le *Traité des Porismes* s'adressait aux géomètres *sachant voir et trouver*, et non pas seulement *apercevoir et déduire des conséquences*, comme dans le cas où il s'agit simplement de *corollaires*. Il s'agissait au contraire de questions *directement* posées, que l'on devait résoudre *pour elles-mêmes*, ainsi que cela ressort et de l'ancienne définition du Porisme donnée par Pappus, et des exemples que présente Proclus.

(g) M. Vincent ne donne pas le sens de l'expression δύνασθαι σχηματίζεσθαι, laquelle prouve que dans la discussion soulevée par les géomètres sur la question de savoir si les propositions d'Euclide étaient

des *théorèmes* ou des *problèmes*, on opposait aux énoncés *tout faits* présentés par Euclide lui-même, ceux dans lesquels on *pouvait* les transformer. *Voyez* ci-dessous l'annotation (*q*).

(*h*) ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως ne peut, ce me semble, se rapporter qu'aux géomètres qui s'appuyaient seulement sur la forme des énoncés *existant dans le Traité des Porismes*. Cette forme était celle des énoncés de *problèmes*, ainsi que cela résulte de divers détails répandus çà et là dans la Notice de Pappus, et du témoignage explicite de Proclus qui appelle des *problèmes*, et cela *par deux fois*, les propositions dont ce traité se composait.

(*i*) J'appelle l'attention sur la manière dont M. Vincent traduit cette définition du *théorème*, ainsi que les définitions suivantes du *problème* et du *Porisme*. C'est ici en effet qu'on voit avec évidence que le savant helléniste s'est laissé entraîner par une idée préconçue. Il veut bien reconnaître dans sa seconde Notice qu'il s'est trompé, « en disant que le théorème est une démonstration, » mais, après avoir fait cet aveu, il ajoute : « Je vais m'efforcer de donner une vraie traduction mot à » mot.... Ce ne sera pas ma faute si ce mot à mot, aussi consciencieux » que je puis le faire, tourne contre celui qui l'aura réclamé, » annonçant par là que ma traduction et mon propre mot à mot font dire à Pappus tout autre chose que ce que le texte signifie. Ce mot à mot de M. Vincent est ainsi conçu : « Le *théorème* est une chose proposée » en vue de la *démonstration* de ce qui est proposé. » Comme j'avais donné dans mes *Objections* cet autre mot à mot : « Un *théorème* est » ce qui est proposé pour la démonstration de cela même qui est » proposé, » on voit que la différence consiste presque uniquement en ce que je traduis l'adjectif démonstratif αὐτοῦ, tandis que M. Vincent traduit comme s'il n'existait pas. Or cet adjectif est ici très-important. Il prouve que les deux choses dont il est question dans le mot à mot de M. Vincent, savoir *une chose proposée* et *ce qui est proposé* ne font qu'une seule et même chose; mais lui veut au contraire, dans son interprétation, que ces deux choses soient *différentes*. En d'autres termes, s'il renonce à prétendre que *le théorème est un raisonnement fait pour démontrer une proposition énoncée*, il persiste à soutenir que le *théorème* est non point *l'objet d'une démonstration à faire*, comme

je l'ai exprimé dans ma traduction et dans mon mot à mot, mais *une chose que l'on propose pour démontrer une proposition énoncée*, ce qui évidemment n'est pas vrai, ainsi qu'on peut le reconnaître en prenant un exemple quelconque de théorème. Mon interprétation est conforme à la fois au texte de Pappus et à la notion que nous avons tous du *théorème*, et si M. Vincent en propose une autre, manifestement inadmissible, c'est afin de ne pas être obligé de renoncer à l'interprétation qu'il donne bientôt après de la première définition du Porisme. *Voyez* ci-dessous l'annotation (*k*).

(*j*) La définition du *problème* telle que M. Vincent la présente, soit dans sa traduction, soit dans son mot à mot, donne lieu aux mêmes observations que la définition du *théorème*. L'adjectif *αὐτοῦ* n'est pas davantage rendu dans le mot à mot, ce qui dénature entièrement le sens, comme pour le *théorème*. Pour moi, de même que pour tout le monde, le *problème* est *l'objet d'une construction à faire*, et c'est bien là ce que Pappus exprime. Pour M. Vincent, le *problème* est *une chose servant à effectuer une construction*. Au surplus, ce n'est pas seulement dans sa Notice sur les Porismes que Pappus définit le *problème* et le *théorème*. Il rapporte au commencement de son troisième livre les définitions que donnaient les géomètres qui se piquaient d'exactitude dans leur langage. *Voyez* mes *Recherches nouvelles sur les Porismes*, Commentaire, § V). Remarquons enfin que la manière dont M. Vincent interprète Pappus en ce qui concerne ces notions si élémentaires du *théorème* et du *problème*, n'offre, jusqu'à présent, aucun sens géométrique, quoiqu'il y soit revenu dans sa *seconde Notice*, par suite de mes *Objections*.

(*k*) Pour comprendre la définition du *Porisme*, il faut la rapprocher de celles du théorème et du problème, comme il suit :

Θεώρημα [ἐστι] τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.

Πρόβλημα [ἐστι] τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.

Πόρισμα [ἐστι] τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.

On voit que ces trois définitions sont jetées pour ainsi dire dans un même moule et se correspondent mot pour mot. Il doit donc en être

de même de leur interprétation. Or les deux premières ont un sens bien déterminé, sur lequel il est impossible de se méprendre. On a donc là deux termes de comparaison, dont il faut nécessairement tenir compte en traduisant la définition du *Porisme*. C'est ainsi que j'ai traduit mot à mot, *le Porisme est ce qui est proposé pour la découverte de cela même qui est proposé;* de sorte que, selon moi, *le Porisme est une chose à découvrir*, et que *la découverte* ou *l'invention* de cette chose est ce que l'on propose de faire, de même que le *théorème* est une chose à *démontrer* et que la *démonstration* de cette chose est ce que l'on propose de faire, de même encore que le *problème* est une chose que l'on propose de *construire* et que la *construction* de cette chose est ce que l'on propose de faire. Il y a, on le voit, analogie complète dans ma traduction entre la définition du *Porisme* et celles du *théorème* et du *problème*.

M. Vincent déclare, sans entrer dans aucune explication, qu'il est évident que ce ne peut être là le sens. Suivant lui, *le Porisme est ce qu'on ajoute pour mettre à profit un résultat obtenu*, et, mot à mot, *le Porisme est une chose proposée en vue de l'acquisition de ce qui est proposé*. Suivant moi, ni cette traduction, ni ce mot à mot ne sont admissibles. Car, en ce qui concerne le mot à mot, d'abord l'adjectif démonstratif *αὐτοῦ* n'y est pas rendu, ce qui change entièrement le sens, comme dans les définitions du *théorème* et du *problème*. En traduisant cet adjectif, on trouve un mot à mot qui ne diffère plus guère du mien que par la signification attribuée au terme *πορισμόν*, que M. Vincent traduit par *acquisition*, tandis que je le traduis par *découverte*. Or Proclus nous apprend que les Porismes sont *des choses que l'on recherche expressément et qui exigent de l'invention*, *ὅσα ζητεῖται μὲν εὑρέσεως δὲ χρήζει*, et comme *acquérir*, dans de telles conditions, c'est *découvrir*, on voit que la signification que j'attribue à *πορισμόν* est bien celle qui convient dans la circonstance. Quant à la traduction qu'il donne, non-seulement on n'y retrouve en aucune façon le mot à mot, mais encore elle n'a aucun rapport avec le texte, ni pour le sens, qu'on ne peut admettre sans dénaturer les définitions du théorème et du problème, ni pour les termes, car si *πορισμός* peut signifier *acquisition* ou *profit*, en aucun cas il ne peut signifier *mise à profit*. De plus *προτεινόμενον* et *προτεινομένου* ne veulent dire ni *ajouté* ni *obtenu*.

(*l*) Μετεγράφη indique un *changement complet* et non une simple *modification*, ainsi qu'on le reconnaît par la seconde définition elle-même. M. Vincent a eu égard à cette observation dans son mot à mot.

(*m*) M. Vincent et moi nous avions supposé que ὑπὸ τῶν νεωτέρων voulait dire *par certains géomètres modernes ;* mais traduire ainsi, c'était restreindre mal à propos la généralité de ce fait si curieux d'une nouvelle définition du *Porisme,* qui avait pris la place de la première, et qui en est entièrement différente. Le mot à mot de M. Vincent, *par les géomètres plus récents*, est plus exact. Cependant je crois plus exact encore de dire *par les modernes*, car ces expressions ὑπὸ τῶν νεωτέρων sont ici opposées à οἱ ἀρχαῖοι, les *anciens*, qu'on trouve un peu plus haut.

(*n*) ἅπαντα πορίζειν ne peut pas signifier *tirer parti des connaissances acquises*. M. Vincent répond à cette objection en présentant ce mot à mot : *déduire tous les corollaires* [*des propositions*], ce qui, certes, n'a aucun rapport avec sa traduction. Or il ne s'agit ici ni de *corollaires* ni de choses à déduire des propositions, comme les *corollaires*, mais bien *de choses que l'on recherche expressément*, ὅσα ζητεῖται. Ainsi donc, d'une part ce mot à mot prouve que M. Vincent abandonne sa traduction, et on voit d'autre part qu'il ne donne point encore le sens du texte.

Quant à l'emploi du terme *corollaire* dans ce passage, M. Vincent lui-même le considère comme *abusif*. Je suis en cela parfaitement de son avis, mais alors pourquoi faire un mot à mot que l'on déclare soi même inadmissible comme mot à mot? ce n'est certainement pas là le moyen de se justifier d'avoir donné une traduction entièrement fautive.

(*o*) Rien dans le texte ne peut signifier *de s'élever au-dessus des simples éléments*. Les mots τοῖς στοιχείοις τούτοις ne désignent pas les simples *éléments de géométrie*, comme M. Vincent le suppose en remplaçant τούτοις par αὐτοῖς, et prenant ensuite αὐτοῖς dans le sens de μόνοις, mais bien les *trois livres* d'Euclide sur les *Porismes*, car l'adjectif démonstratif τούτοις prouve qu'il s'agit de l'ouvrage même dont Pappus parle. Cet ouvrage, qui était unique dans son genre au temps

de Pappus, est sans aucun doute considéré ici comme contenant les *éléments des Porismes*. Ce géomètre appelle de même des *éléments*, στοιχεῖα, les deux livres d'Apollonius sur les *lieux plans*.

M. Vincent donne, dans sa *seconde Notice*, ce mot à mot : *usant avec abus de ces éléments*. Mais en cela il ne fait pas attention qu'en traduisant τοῖς στοιχείοις τούτοις par *de ces éléments*, ces mots *avec abus* sont de trop, puisqu'ils n'ont été introduits d'abord qu'en changeant τούτοις en αὐτοῖς, et que ce changement n'a plus lieu maintenant. Quoi qu'il en soit, ce mot à mot est loin de justifier la traduction de M. Vincent.

(*p*) Rien dans le texte ne peut signifier *obligés de se renfermer dans l'évidence des seuls points mis en question*. Le mot à mot de M. Vincent, *et y montrant seulement cela même qui est demandé*, prouve bien que ce n'était pas là le sens. L'adjectif démonstratif αὐτό n'est pas oublié ici comme dans les définitions du *théorème*, du *problème* et du *Porisme*. Quant à ce mot à mot considéré en lui-même, je ferai observer qu'il ne rend pas suffisamment l'adjectif indéterminé ὅ τι, qui équivaut au latin *quodcumque* ou *quodlibet*, et non pas seulement à *quod*. Car la seconde définition, à laquelle ce passage se rapporte, devait nécessairement s'appliquer à *toutes les propositions de l'ouvrage d'Euclide*. Il fallait qu'en en prenant une au hasard, cette définition se trouvât vérifiée, autrement elle n'aurait pas eu de raison d'être, et on ne comprendrait pas qu'elle eût été adoptée aussi généralement que le supposent ces termes ὑπὸ τῶν νεωτέρων.

(*q*) Rien dans le texte ne peut signifier *mais sans pouvoir en faire aucune application*. Le mot à mot de M. Vincent, *mais sans en déduire de corollaires*, ne justifie en aucune manière cette traduction. D'un autre côté, il y a dans ce prétendu mot à mot une inadvertance nouvelle du savant helléniste. Le véritable mot à mot de μὴ πορίζόντων δὲ τοῦτο est *mais ne découvrant pas cela*, et non point *mais sans en déduire de corollaires*; τοῦτο est ici le régime de πορίζόντων. M. Vincent perd de vue sans cesse ces expressions de Proclus, ὅσα ζητεῖται, qui indiquent, de même que la première définition du *Porisme*, *des choses que l'on recherche expressément pour elles-mêmes*. Le véritable sens, que j'ai tâché de rendre après quelques hésitations [*voyez* dans mes

Recherches nouvelles sur les Porismes l'annotation (*c*) de ma traduction, et dans le *Supplément* le § IV, 6° et 7°], est que l'on se contentait, pour justifier la nouvelle définition, d'ouvrir le *Traité des Porismes* et de poser le doigt sur n'importe laquelle des *solutions* données par Euclide, sans s'inquiéter en aucune façon des raisonnements placés entre la *question* et la *réponse*. En rapprochant cette *réponse* de la *question*, on mettait en évidence le fait matériel dans lequel la nouvelle définition avait sa raison d'être.

(*r*) Au lieu de *s'appuyant sur la définition*, il faut, mot à mot, *réfutés par la définition*, ce qui est le sens que j'ai adopté. M. Vincent le rejette dans ces termes : « Il y a évidemment ici une distraction de » l'honorable auteur, qui dit tout le contraire de ce que signifie le » texte. » Si quelqu'un a une distraction à se reprocher en ceci, ce n'est pas moi; car en traduisant ἐλεγχόμενοι par *réfutés*, je n'ai fait que prendre une des acceptions *données par le Dictionnaire*. Il est bien vrai que ce mot peut être traduit aussi par *convaincus*, mais il ne s'ensuit pas que ce soit là le sens. Pappus, après avoir signalé l'incompétence des auteurs de la seconde définition du *Porisme* ou de ceux qui l'adoptent, exprime évidemment un *blâme* à leur adresse.

Ce qui prouve au surplus que l'acception que j'ai choisie est en effet celle qui convient dans le cas actuel, c'est que la nouvelle définition ne s'applique point à ces questions : *un cercle étant donné, en trouver le centre; deux grandeurs commensurables étant données, en trouver la plus grande commune mesure*, citées par Proclus comme pouvant donner une idée de ce que c'est qu'un Porisme. Ce sont là *des choses que l'on propose expressément de découvrir* conformément à la première définition, mais en quoi chacune de ces deux choses pourrait-elle être, suivant la seconde définition mot à mot, *ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local?* Cette seconde définition s'appliquait aux *Porismes d'Euclide* seulement, parce qu'elle avait été faite sur ces *Porismes* mêmes; mais il y avait, comme on le voit par ces exemples, d'autres *Porismes* pour lesquels elle était en défaut, tandis que la première n'était en défaut pour aucun. C'était donc *contrairement* à celle-ci, et non *en s'appuyant sur elle*, qu'on adoptait la seconde définition.

(*s*) Il ne me semble pas possible que των διδασκομένων puisse être

traduit, comme le propose M. Vincent, par *la théorie*. Du reste il adopte dans son mot à mot le sens que j'ai donné. Je fais remarquer à ce sujet que cette expression *la théorie des Porismes*, dont M. Vincent s'est servi dans le titre de sa *première Notice* et qu'il a reproduite dans le titre de la *seconde*, est tout à fait impropre. L'objet d'un texte grec n'est pas une *théorie* par cela seul que ce texte se rapporte à un ouvrage de géométrie.

(*t*) Ἀπὸ συμβεβηκότος ne veut pas dire *d'après les circonstances signalées ci-dessus*. Συμβεβηκότος non précédé de l'article indique une chose dont il n'a pas encore été question, ou dont on parle pour la première fois. Il s'agit manifestement de la circonstance qui a donné lieu à la seconde définition du Porisme. On voit, du reste, combien le mot à mot de M. Vincent, *d'après ce qui est arrivé*, ressemble peu à sa traduction.

Ici, pas plus que dans ce qui précède, je ne vois se vérifier cette menace de M. Vincent, « ce ne sera pas ma faute si ce mot à mot, aussi » consciencieux que je puis le faire, tourne contre celui qui l'aura » réclamé. » C'est justement le contraire qui a lieu.

(*u*) La traduction et le mot à mot de la seconde définition présentés par M. Vincent, savoir : *le Porisme est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local*, ne diffèrent point du mot à mot que j'avais indiqué moi-même, mais que j'ai complété pour le rendre plus clair. C'est ainsi que j'ai traduit : *le Porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse* (*pour que celle-ci devienne l'énoncé*) *d'un théorème local* : ce qui d'ailleurs est très-naturel, car l'énoncé d'un *théorème local* se composant essentiellement d'une *hypothèse* et d'une *affirmation*, il paraît tout simple d'admettre que ce qui manquait dans l'énoncé était l'*affirmation*, d'autant plus que les questions étaient présentées sous forme de *problèmes*. Or M. Vincent repousse l'interprétation que cette traduction exprime. Il n'élève d'ailleurs, qu'on le remarque bien, aucune objection contre cette interprétation même; je dois donc me borner ici à montrer que celle qu'il prétend être la véritable ne saurait être admise.

« Si le Porisme, dit M. Vincent dans sa *première Notice*, ajoute à » l'hypothèse d'un théorème local, par là même il introduit la déter-

» mination dans un problème qui, en soi, était indéterminé; et s'il » trouve à se placer dans un lieu géométrique, ce n'est, en quelque » sorte, qu'en éliminant celui-ci, bien loin de le constituer. » Il cite à ce sujet deux *théorèmes locaux* donnés par Proclus, savoir, l'espace compris entre deux parallèles, qui est le lieu des parallélogrammes équivalents construits sur la même base, et le segment capable d'un angle donné, qui est pareillement le lieu des angles égaux à l'angle donné. « Dans le cas du parallélogramme, continue M. Vincent, il » manque soit son sommet, soit l'inclinaison des côtés sur la base, con- » ditions nécessaires pour faire disparaître l'indétermination. Dans le » segment capable d'un angle donné, il manque de même soit le som- » met de cet angle, soit la direction d'un côté, etc. [*] »

La *seconde Notice* de M. Vincent fait connaître plus complétement sa pensée à cet égard. Il la résume ainsi : « Le caractère essentielle- » ment *local* du théorème ayant été bien établi, quelle en est l'hypo- » thèse? et que manque-t-il à cette hypothèse pour constituer un Po- » risme ou un problème déterminé? »

Ainsi donc, ce qui pour lui constitue *l'essence du Porisme*, c'est *ce que l'on ajoute à l'hypothèse du théorème local pour faire de ce théorème un problème déterminé, et ce problème déterminé est un Porisme.*

Afin d'être plus clair, je prends pour exemple le *théorème local* que voici : *Étant donné deux points* $\varkappa$, θ *et deux droites* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, *dont la seconde soit parallèle à* $\varkappa\theta$, *si l'on mène d'un point* ε *de* $\alpha\beta$ *les*

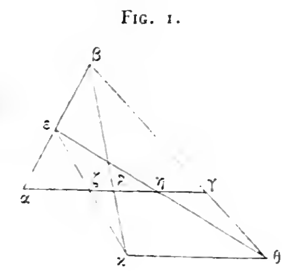
---

[*] M. Vincent ajoute : « On reconnaîtra sans peine que cette notion antique du lieu » géométrique, analogue à l'idée que les modernes attachent à la même expression, » en diffère cependant d'une manière essentielle. Or il me paraît évident que l'idée mo- » derne, substituée à l'idée ancienne, n'a pas peu contribué à obscurcir la véritable et » simple notion des Porismes, comme la suite de cette Notice le montrera. »

On ne trouve rien, à la suite de ce passage, soit dans la *première Notice* de M. Vincent, soit dans la *seconde*, qui fasse comprendre ce qu'il veut dire par là. Quoi qu'il en soit, Pappus, qui certainement possédait la vraie notion du *Porisme*, présente les énoncés des *lieux* conformément à l'idée moderne, et on remarque même parmi les *lieux plans* d'Apollonius les deux exemples que cite M. Vincent d'après Proclus. Ils font, sous cette forme moderne, l'objet des troisième et quatrième énoncés du premier livre. *Voyez* le § I[er] de l'*Appendice* qui fait suite à mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide.*

droites $\varepsilon\varkappa$, $\varepsilon\theta$, *les segments* $\alpha\zeta$, $\alpha\eta$ *qu'elles détermineront sur* $\alpha\gamma$ *seront*

FIG. 1.



entre eux dans un rapport constant, c'est-à-dire toujours le même quelle que soit la position du point ε *sur la droite* $\alpha\beta$. Cette proposition est l'une de celles que présente M. Vincent dans sa *seconde Notice*. Je la réduis ici à ses termes essentiels, mais on en retrouvera plus loin l'énoncé tel que M. Vincent le donne. *Voir* à ce sujet l'annotation (z').

L'hypothèse, dans ce *théorème local*, consiste en ceci : *Etant donné deux points* $\varkappa$, θ *et deux droites* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, *dont la seconde soit parallèle à* $\varkappa\theta$, *si l'on mène d'un point* ε *de* $\alpha\beta$ *les droites* $\varepsilon\varkappa$, $\varepsilon\theta$. L'affirmation est que *les segments* $\alpha\zeta$, $\alpha\eta$, *que les droites* $\varepsilon\varkappa$, $\varepsilon\theta$ *détermineront sur* $\alpha\gamma$, *seront entre eux dans un rapport constant, c'est-à-dire toujours le même quelle que soit la position du point* ε *sur la droite* $\alpha\beta$. On peut, pour fixer les idées, supposer que le *rapport constant* est celui de deux segments $\alpha\delta$, $\alpha\gamma$, déterminés par les deux droites $\beta\varkappa$, $\beta\theta$, menées d'un point donné β.

Suivant M. Vincent, le Porisme *complet* correspond précisément au cas où, étant donné la droite $\theta\varkappa$ et le point ε, on demande les points ζ, η; « ou plutôt, ajoute-t-il, où l'on établit que les distances $\alpha\zeta$, $\alpha\eta$ sont » entre elles dans un rapport donné, celui de $\alpha\delta$ à $\alpha\gamma$. »

Ainsi donc ce qui fait l'*essence* du Porisme, *ce qui manque à l'hypothèse du théorème local*, se réduit simplement à ce que le point ε soit *donné*. De sorte que si l'on se donne la distance $\alpha\varepsilon$, *cette distance sera le Porisme;* ou plutôt le Porisme ne serait autre chose *que la mention, introduite dans l'hypothèse, que le point* ε *est donné.*

Or, la question étant ainsi posée, il est facile de conclure. En effet :

1°. L'introduction de cette condition dans l'hypothèse du *théorème local*, en fait un *théorème ordinaire*, et non point un *problème*, comme

il le faudrait, puisque Proclus se sert de la dénomination de *problèmes* pour désigner les *Porismes d'Euclide*.

2°. Cette condition elle-même n'a rien de commun avec la première définition du *Porisme*, traduite comme j'ai montré qu'il faut le faire.

3°. On ne peut en aucune manière lui appliquer ces expressions caractéristiques de Proclus, ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήζει, κ. τ. λ., car évidemment il n'y a là rien à *chercher*, rien qui exige de *l'invention*.

4°. Comment supposer qu'Euclide ait écrit un traité considérable dont une chose aussi complétement dépourvue de tout caractère saillant aurait été l'objet principal? et à quel titre ce que l'on ajoute ainsi à l'hypothèse d'un *théorème local*, pour détruire l'indétermination, pourrait-il avoir fixé l'attention au point de devenir la définition même du *Porisme?*

Telles sont les objections que soulève l'interprétation de la seconde définition du Porisme proposée par le savant helléniste. Je n'aurais point osé les lui adresser avant la publication de sa *seconde Notice*. Cette interprétation me semblait en effet si singulière, que je craignais de la lui attribuer à tort. J'avais même supposé que, dans sa pensée, les Porismes ainsi conçus devaient être incorporés aux propositions du *Traité des Porismes* et en faire partie intégrante, ce qui me semblait être indispensable dans un ouvrage dont ces Porismes étaient l'objet même. Et alors les seules objections que je pusse lui adresser à ce sujet étaient, en premier lieu, qu'on ne voyait pas pourquoi le Porisme s'ajoutait à l'*hypothèse* et non à l'*énoncé* tout entier du *théorème local*, et en second lieu que, *le Porisme une fois introduit*, les propositions devenaient *sans exception aucune exclusives de toute indétermination*, ce qui était contredit par les propositions indéterminées données par Pappus dans sa *Notice* même sur les Porismes.

Mais la pensée de M. Vincent est aujourd'hui mieux connue : Il se défend d'avoir jamais dit que les propositions d'Euclide dussent être, *sans exception aucune, exclusives de toute indétermination*. Il admet au contraire maintenant qu'il y avait dans le *Traité des Porismes* des propositions *indéterminées*, c'est-à-dire *séparées de leurs Porismes*, et que ces propositions y étaient en assez grand nombre pour avoir donné lieu à la seconde définition du Porisme. A la fin de sa *seconde*

Notice, il en présente plusieurs, obtenues par un procédé que j'avais moi-même indiqué dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes* (Commentaire, § XVI), et qui consiste à prendre les *réciproques* des lemmes de Pappus relatifs aux *Porismes*.

M. Vincent va même plus loin. Se ravisant, il se laisse aller à donner le nom de *Porismes* à quelques-unes de ces propositions, qui sont des *théorèmes locaux*, et cela *avant d'y avoir introduit ce qu'il prétend être le Porisme*, c'est-à-dire ce qui doit *faire disparaître l'indétermination*. Voici donc des *théorèmes locaux* qui se trouvent être des *Porismes*. Il est vrai que M. Vincent se hâte d'ajouter qu'ils deviennent des *Porismes complets*, ou, pour me servir de son autre expression, aussi très-peu justifiée, des *problèmes déterminés*, lorsqu'on particularise quelque chose dans l'*hypothèse*, particularisation qu'il considère comme étant *le Porisme proprement dit*. De sorte que, tout compte fait, voilà *trois Porismes différents* : 1° le *théorème local*, appelé simplement *Porisme ;* 2° le *problème déterminé*, qui est le *Porisme complet ;* 3° le *Porisme proprement dit*, celui de la *définition*, qu'il faut ajouter au *simple Porisme* pour avoir le *Porisme complet*.

Mais dans ces exemples, c'est le *simple Porisme*, le *théorème local*, qui est mis en évidence, qui appelle l'attention du lecteur; du moins M. Vincent fait tout ce qu'il faut pour qu'on croie que telle est en effet son intention. Quant aux deux autres, le rôle qui leur est attribué ne semble en aucune façon proportionné à leur importance. On sent même que ces prétendus Porismes (le *Porisme complet* et le *Porisme proprement dit*) pourraient disparaître tout à fait sans aucun inconvénient, et on se demande, en lisant la *seconde Notice* de M. Vincent, jusqu'à quel point il tient à conserver ces *Porismes*-là, concurremment avec ce qu'il appelle maintenant le *simple Porisme*.

Pour achever cette démonstration, je vais appliquer à l'exemple ci-dessus l'interprétation que je donne de cette seconde définition, savoir, que *le Porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse* (*pour que celle-ci devienne l'énoncé*) *d'un théorème local*.

Voici d'abord l'hypothèse, ou la question à résoudre : *Étant donné deux points* $\varkappa$, θ *et deux droites fixes* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, *dont la seconde soit parallèle à* $\varkappa\theta$; *si l'on mène d'un point* ε *de* $\alpha\beta$ *les droites* $\varepsilon\varkappa$, $\varepsilon\theta$, *ces droites détermineront sur* $\alpha\gamma$ *deux segments* $\alpha\zeta$, $\alpha\eta$, *qui varieront ensemble avec*

la position du point ε *sur* $\alpha\beta$; *on propose de découvrir la relation qui existe entre ces deux segments?*

Je fais remarquer en passant que la question est présentée sous forme de *problème*, comme cela est nécessaire; qu'il s'agit, conformément à la première définition, *d'une chose que l'on demande de découvrir* et qui est *le Porisme même;* que cette chose doit être recherchée *expressément* et exige de *l'invention*, suivant ce qui est exprimé par Proclus.

La réponse à cette question est *que* $\alpha\zeta$ *est à* $\alpha\eta$ *dans un rapport constant.* C'est le *Porisme* du premier livre d'Euclide, consistant en ce que *telle droite est à telle autre dans un rapport constant.*

Or en joignant cette réponse à l'hypothèse renfermée dans la question, on a ce *théorème local : Étant donné deux points* κ, θ *et deux droites* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, *dont la seconde soit parallèle à* $\kappa\theta$, *si l'on mène d'un point* ε *de* $\alpha\beta$ *les droites* $\varepsilon\kappa$, $\varepsilon\theta$, *les segments* $\alpha\zeta$, $\alpha\eta$ *qu'elles détermineront sur* $\alpha\gamma$ *seront entre eux dans un rapport constant, c'est-à-dire toujours le même quelle que soit la position du point* ε *sur la droite* $\alpha\beta$. La seconde définition, telle que je l'interprète en la traduisant, est donc entièrement vérifiée aussi bien que la première, et cela en offrant à l'esprit un fait assez important pour donner l'idée d'une définition du Porisme, ce qui n'existe pas dans l'interprétation que M. Vincent prétend être la véritable.

Observons enfin que la raison du débat qui s'était élevé sur la question de savoir si les propositions d'Euclide appartenaient au genre des *théorèmes* ou à celui des *problèmes*, apparaît ici avec évidence. Pour ceux qui ne s'arrêtent qu'à la forme de l'énoncé, il s'agit d'un *problème*. Pour ceux qui font attention que la question et la réponse constituent ensemble un *théorème*, et que la solution ne consiste pas dans une *opération à faire*, il s'agit d'un *théorème*. La raison de ce débat n'existe plus dans la supposition de M. Vincent.

On voit par cette discussion quelles sont les conditions auxquelles il faut satisfaire pour interpréter convenablement la seconde définition du *Porisme*. Je crois avoir surabondamment démontré que M. Vincent n'en tient aucun compte, et qu'il se trompe complétement.

(v) *Dans le genre des Porismes* n'est pas ce que le texte signifie. Il

faut traduire, mot à mot, *dans ce genre de Porismes*, savoir celui auquel s'applique la seconde définition, ce qui doit s'entendre de *tous les Porismes d'Euclide*, puisque cette définition était justifiée par tous ces Porismes.

Ce genre se divisait en plusieurs espèces, dont une comprenait les *lieux*, c'est-à-dire des propositions *locales* dans lesquelles ce qu'il fallait découvrir était *la nature d'un lieu géométrique*; en effet, les *théorèmes locaux* dans lesquels l'affirmation portait sur la nature d'un *lieu géométrique*, avaient reçu la dénomination de *lieux*. Tels sont les *lieux plans* d'Apollonius, dont Pappus nous a transmis les énoncés, soit qu'on leur conserve la forme sous laquelle ils sont présentés par Pappus, soit que l'on adopte la forme sous laquelle Eutoce nous fait connaître un de ces énoncés. En les mettant sous forme de *problèmes*, on a les *lieux* du *Traité des Porismes*.

(x) πλεονάζουσι se rapporte à τόποι, c'est-à-dire aux *lieux*, et non point aux Porismes, comme M. Vincent le suppose arbitrairement. Ce qui vient ensuite fait voir qu'en effet c'est des lieux qu'il s'agit.

(y) ἐν τῷ ἀναλυομένῳ se traduit parfaitement sans qu'il soit nécessaire de supposer avec M. Vincent que τόπῳ est sous-entendu. Τὸ ἀναλυόμενον n'est autre chose que *le résolu* ou le résultat des recherches géométriques, ou encore ces recherches elles-mêmes. Pappus exprime simplement que les lieux s'y rencontrent en grand nombre. Or ceci ne doit s'entendre évidemment que du *Traité des Porismes*, lequel renfermait des *lieux*, comme nous le verrons bientôt, et non point des autres traités dont il est fait mention dans la préface du septième livre de Pappus [*]. Ce géomètre parle ici du *Traité des Porismes*, et ce qu'il dit doit s'y rapporter.

---

[*] M. Vincent n'admet pas cette expression *lieu résolu* par laquelle on a traduit τόπος ἀναλυόμενος, qui est le nom que portait chez les Grecs l'ensemble des traités formant l'objet de la préface du septième livre de Pappus. Il considère le mot ἀναλυόμενος comme appartenant à la *voix moyenne* et non au *passif*. Je ne vois pas comment cette manière de traduire peut donner en français *lieux* (*communs*) *de l'analyse*. Comme il s'agit d'une chose qui n'intéresse pas la *question des Porismes*, je me borne à cette simple remarque.

(z) *Voyez*, pour la signification de ces mots κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων, le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 8°. Je dois reconnaître toutefois que ces mêmes mots peuvent aussi s'interpréter assez naturellement, en supposant qu'ils expriment le fait matériel de la séparation des *Porismes-lieux* d'avec les autres espèces de Porismes, auxquels se rapporterait alors le terme πορισμάτων. Je traduis même aujourd'hui conformément à cette interprétation; mais celle que j'avais adoptée en premier lieu constitue en elle-même une conjecture digne de quelque attention. Elle serait surtout plausible s'il était admis que le *Traité des Porismes* renfermait non-seulement des questions résolues, mais encore d'autres questions *non résolues* présentées comme exercices.

(a') Ce que M. Vincent fait dire à Pappus revient en définitive à ceci : *les Porismes sont dans le Traité des Porismes*. Si Euclide avait dû prendre ses Porismes dans les autres traités du *lieu résolu*, il n'aurait pu en trouver que dans les *lieux solides* d'Aristée l'Ancien, puisque Apollonius et Ératosthènes sont venus trop longtemps après Euclide pour que celui-ci ait pu être à même de profiter de leurs travaux. Évidemment c'est des *lieux* qu'il s'agit, et non des Porismes en général. Ce que le géomètre grec veut dire, c'est que les *lieux*, par suite de leur grand nombre, sont réunis en groupes dans les *trois livres d'Euclide*.

(b') Cette phrase ne se rapporte pas aux *lieux en général*. J'en ai dit la raison dans le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 8°. D'ailleurs γοῦν signifie *en effet*, et non *en général* [**].

(c') *Voyez* également, sur ce point, le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 8°.

---

[*] M. Vincent ne se trompe pas seulement sur le sens de ces divers détails relatifs aux *lieux*. Il se trompe aussi, et très-complétement, dans tout ce qu'il dit du septième livre de Pappus. Il prend les trente-huit lemmes relatifs aux *Porismes* pour « une analyse développée des trois livres de Porismes composés par Euclide; » bien plus, il croit que tout ce septième livre est rempli de *Porismes*. « Il faut remarquer, en effet, » dit-il, que les Porismes ne se trouvent point exclusivement dans les trois livres dus

(*d'*) J'incline à croire que le terme πορίσμασι s'applique ici aux propositions autres que les *lieux*. Car on ne comprend guère comment l'énoncé d'une question qui se résout par la découverte de la nature d'un *lieu géométrique* pourrait comporter des *sous-entendus*. Il en est autrement des questions qui correspondent aux *théorèmes locaux*, c'est-à-dire dans lesquelles la *réponse* ou la *solution* est l'énoncé d'une propriété d'un *lieu géométrique* dont la nature est connue. Il pouvait arriver alors que l'énoncé de la question ou l'*hypothèse* ne fît pas connaître certaines choses, très-essentielles cependant, par exemple certains points à partir desquels on sous-entendait que des segments variables devaient être mesurés lorsqu'il s'agissait de relations segmentaires. On sait qu'en pareille circonstance la forme de la relation dépend du choix de ces points. Or si le lecteur n'est pas prévenu que l'on raisonne dans une certaine hypothèse, il pourra se trouver dans le cas indiqué par Pappus. Je soumets cette conjecture aux géomètres, sans me dissimuler qu'elle laisse encore beaucoup d'incertitude dans l'esprit.

» à Euclide, dont Pappus fait une mention speciale, mais que tout le septième livre de » Pappus en est implicitement rempli. » Cette idée s'est si bien emparee de son esprit que, trouvant au commencement de la préface de ce livre, dans l'énumération des détails que Pappus se propose de donner dans ses notices sur les écrits composant le τόπος ἀναλυόμενος, cette mention ἀλλὰ και τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα, il se persuade qu'il faut lire ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα και τὰ ζητουμενα, faisant dire à Pappus une chose qui n'est pas, car chaque notice est terminée par l'indication du nombre de lemmes de ce septième livre qui se rapportent a l'ouvrage auquel la notice est consacree. S'il fallait absolument une correction en cet endroit, je proposerais de lire τὰ λήμματα εἰς τὰ ζητούμενα. La préposition εἰς convient d'autant mieux ici que les deux premiers lemmes pour les *Porismes* sont accompagnés de ces mentions τοῦ πρώτου εἰς τὸ πρῶτον, εἰς το δευτερον.

Pour en revenir au contenu de ce septième livre, je ferai remarquer d'abord que ces termes du titre de sa préface ἕβδομον περιέχον τὰ λήμματα τοῦ ἀναλυομενου τόπου, indiquent clairement que Pappus n'y donne que des *lemmes* proprement dits, et ensuite que cette conclusion est entièrement confirmée par l'examen de ceux de ces lemmes qui sont relatifs à des ouvrages parvenus jusqu'à nous, par exemple aux sept premiers livres des *Coniques* d'Apollonius. Il ne peut s'élever aucun doute sur la nature et la destination de ces propositions *auxiliaires*. Voyez au surplus ce que j'ai dit des lemmes dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes* (matériaux et historique de la question, § IV).

La nouvelle interprétation que j'ai donnée des termes γραφή, ἀπόδειξις et ὑπεμφαίνουσα, employés par Pappus dans la seconde phrase de cette *Notice sur les Porismes*, fait d'ailleurs disparaître une difficulté que j'avais signalée dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § X).

(*e'*) M. Vincent fait dire ici à Pappus exactement le contraire de ce que dit le texte. En effet, ces expressions, περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει, ne signifient point *d'un énoncé unique faire ressortir de nombreuses propriétés*, mais *faire entrer* ou *condenser dans un énoncé unique* beaucoup de propositions du *Traité des Porismes*. C'est dans ce sens qu'on trouve, et que M. Vincent lui-même traduit, Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας ἐν μιᾷ προτάσει. On trouve encore dans la notice relative aux *Contacts*, πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, et dans celle relative aux *Lieux plans*, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει. Dans chacune de ces circonstances Pappus donne un énoncé qui en résume d'autres en nombre plus ou moins grand. De plus, la phrase où se trouvent ces expressions n'a point, avec la précédente, le rapport indiqué par les mots *en effet* qu'emploie M. Vincent. Ce que Pappus veut dire, c'est qu'il ne peut pas donner pour le *Traité des Porismes* des énoncés généraux dans le genre de ceux où il a résumé les propositions des ouvrages d'Apollonius, dont les notices précèdent celle des *Porismes*.

(*f'*) *Absolument impossible* n'est pas tout à fait le sens. La chose est seulement *très-peu possible*. On pouvait réunir des propositions, mais il n'y en aurait eu en général qu'un si petit nombre dans chaque groupe, que la chose n'en valait pas la peine.

(*g'*) « Je pense, dit M. Vincent, qu'il y a dans l'expression grecque » ce que l'on nomme *anacoluthe*, et que l'effet est ici remplacé par la » cause. On peut en juger par la suite logique des idées. » Il est évident qu'il faut, au contraire, prendre ici le mot à mot, puisque Pappus dit un peu plus loin qu'Euclide n'a mis dans son traité que *les principes et les germes seulement de nombreuses et grandes foules de propositions*.

(*h'*) Cette expression *sur la totalité* ne rend pas le sens du texte.

Cette nouvelle erreur de M. Vincent est une conséquence de celle que je signale dans l'annotation qui précède.

(i') La phrase que M. Vincent commence par ces mots, *c'est ainsi que*, a pour objet une exception à ce fait que généralement les groupes de propositions du *Traité des Porismes* susceptibles d'être réunies dans un seul énoncé, n'en comprendraient qu'un très-petit nombre. En pareil cas, le terme convenable est *cependant*.

(j') Il est évident que Pappus dit ici qu'il y avait dans le premier livre des Porismes une suite ou un groupe de propositions appartenant à cette espèce des *lieux* plus abondamment répandus que les autres, et que ces propositions étaient toutes analogues entre elles, circonstance qui lui permet de les comprendre dans un énoncé unique.

Toutefois le texte est altéré, de sorte qu'on est privé du secours d'un mot à mot. On a, il est vrai, la ressource des restitutions conjecturales. J'en ai proposé une dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XIII). M. Vincent entre de son côté dans cette voie, et propose une autre restitution, qui consiste à remplacer δεδομένον par δεδομένων, et à supposer que πρὸς ἀρχὴν δεδομένων signifie *pour base des données* [*]; de sorte qu'il s'agirait d'une

[*] Ces deux restitutions sont faites dans l'hypothèse qu'il y a un point avant les mots πρὸς ἀρχήν. Or il faut faire attention que dans le texte de Halley il y a un point après ces deux mêmes mots. Dans les manuscrits de la Bibliothèque Impériale nos 2368 et 2440, il n'y a de point ni avant ni après πρὸς ἀρχήν, et M. Vincent en a conclu, un peu précipitamment, ce me semble, que j'avais affirmé une chose fausse dans mes *Recherches nouvelles* [matériaux et historique de la question, § I, note (f)]. Je m'étais mal expliqué, il est vrai, mais j'avais parlé de Halley en même temps que des manuscrits, ce qui aurait dû mettre en garde M. Vincent. J'avais d'ailleurs donné le texte d'après ces mêmes manuscrits nos 2368 et 2440, c'est-à-dire sans mettre de point ni avant ni après πρὸς ἀρχήν, tandis qu'il y en a un après ces mots dans le texte de Halley, et, par suite, très-probablement aussi dans les manuscrits dont ce géomètre s'est servi. Quant à la lettre majuscule qui suit le point après πρὸς ἀρχήν dans cette note (f), elle n'est là que par une erreur d'impression.

Si l'on voulait, d'après ces remarques, placer la coupure après πρὸς ἀρχὴν, ces mots sembleraient devoir se rapporter à cet autre endroit de la Notice de Pappus où il dit

dizaine de lemmes. Or cela n'est pas admissible, aucun doute ne pouvant s'élever sur l'intention de Pappus. Il s'agit bien de dix propositions du *Traité des Porismes*, et non d'une *dizaine de lemmes*. Du reste M. Vincent se contredit lui-même sur ce point, dans sa *seconde Notice*. *Voyez* à ce sujet le dernier *alinéa* de l'annotation (n').

(k') Les termes ὑπτίου, παρυπτίου, παραλλήλου se rapportent non point à diverses positions d'une ligne droite, mais à *trois figures* dont chacune est à elle seule un *quadrilatère complet*. C'est ce que j'exprime dans la traduction que j'oppose ici à celle de M. Vincent, en remplaçant la périphrase que j'avais donnée dans ma première traduction. Les géomètres grecs paraissent avoir été dans l'usage de donner à certaines figures les noms des objets dont elles rappelaient l'idée. C'est ainsi que la figure du huitième lemme est appelée βωμίσκος, *petit autel*.

(l') Je me sers avec intention de l'expression *droite fixe*, au lieu du mot à mot *droite donnée de position*, parce qu'il y a dans la figure d'autres droites qui sont *variables de position*. De même je mets *point fixe* au lieu de *point donné*, pour mieux marquer l'opposition entre les points réellement *fixes* et ceux qui sont *variables de position*.

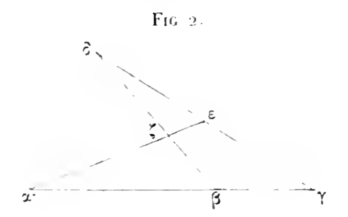
(m') Suivant M. Vincent, cette proposition consiste en ce que *si*

---

qu'Euclide n'a fait que répandre les *commencements et les germes de nombreuses et grandes foules* [*de propositions*], et on trouverait peut-être là leur explication. Mais le complément de ἐν ᾗ ὀλίγα étant alors πρὸς ἀρχήν, ces expressions δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας paraîtraient surcharger la phrase. Il ne serait donc pas absolument impossible qu'il y eût une transposition dans ce passage, et qu'en mettant un point après πρὸς ἀρχήν, la phrase suivante dût commencer par δείγματος δ' ἕνεκα τῆς πολυπληθίας δεδομένον τοῦ πρώτου βιβλίου, κ. τ. λ. Comme résultat, cette restitution est assez heureuse, puisque si quelque chose peut donner une idée de la grande abondance des propositions dont il s'agit, c'est bien plutôt un groupe exceptionnellement étendu de propositions susceptibles d'être comprises dans un énoncé unique, que des groupes qui n'en renferment que deux ou trois. Je ferai enfin observer qu'en mettant au lieu du pluriel ὁμοειδῆ le singulier ὁμοειδές, qui se rapporterait, ainsi que δεδομένον, à πλῆθος, la phrase semble n'avoir besoin d'aucune autre correction pour offrir un sens très-plausible. Je livre ces conjectures pour ne rien omettre.

dans le quadrilatère complet $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ *les trois points* α, β, γ *sont donnés, et que deux des trois autres points d'intersection* δ, ε, ζ, *par*

Fig. 2.



exemple δ, ε, *soient donnés chacun sur une des droites de la figure, savoir* ε *sur* $\alpha\varepsilon$ *et* δ *sur* $\gamma\delta$, *le dernier point* ζ *se trouvera à l'intersection des deux droites* $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$.

Cette interprétation ne résultait pas clairement de la *première Notice* du savant helléniste, et certes je n'eusse point osé la lui attribuer s'il ne l'avait développée lui-même dans sa *seconde Notice* de manière à lever tous les doutes; car elle est en contradiction manifeste avec les témoignages de Pappus et de Proclus, et rien ne la justifie dans le mot à mot. En effet :

1°. Pappus présente son énoncé comme résumant dix propositions qui appartiennent à cette espèce des *lieux* plus abondamment répandus que les autres. Cette proposition générale doit donc être un *lieu*; or la proposition de M. Vincent n'est pas un *lieu*.

2°. Cette proposition est d'une simplicité triviale. Aucun géometre n'admettra qu'elle ait pu figurer, soit par elle-même, soit par ses cas particuliers, dans un ouvrage destiné à ceux qui sont en état de *voir* et de *trouver* [*]. Il est d'ailleurs impossible d'y reconnaître les caractères que Proclus signale dans les Porismes par ces expressions ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήζει, car la détermination du point ζ ne peut être

[*] Il est vrai qu'on pourrait objecter à ce raisonnement que des choses qui nous paraissent aujourd'hui puériles ont pu être dans l'antiquité l'objet d'une sérieuse attention. Cet argument, que M. Vincent emploie dans sa *seconde Notice* en faisant allusion à l'admiration naïve que causait aux Anciens les propriétés les plus simples des nombres, n'est pas admissible lorsqu'il s'agit de la *géométrie* des Grecs et notamment de géomètres tels qu'Euclide et Pappus. Au reste, pour édifier le lecteur sur ce point, je ferai remarquer que la proposition de M. Vincent est un simple corollaire des propositions XXV et et XXVI du livre des *Données* d'Euclide.

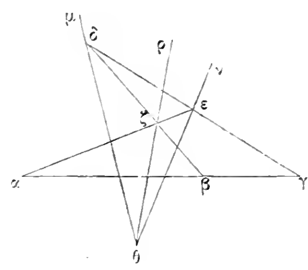
évidemment l'objet d'une *recherche expresse*, et n'exige point d'*invention*. C'est là au contraire une de ces choses que Proclus *exclut* de la catégorie des *Porismes*, par ces autres expressions οὔτε γενέσεως μόνης καὶ θεωρίας ἁπλῆς.

3°. M. Vincent suppose que ces mots de l'énoncé ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας se rapportent nécessairement à deux des droites αε, βζ, γδ, lesquelles seraient ainsi *données de position*, et il veut en outre que ἅπτηται signifie la même chose que δεδομένα ῇ. Or rien dans le texte n'autorise à supposer que les *droites données de position* dont il s'agit soient deux de celles qui forment le quadrilatère, et, si on le suppose, c'est-à-dire si l'on admet par exemple que les droites αε et γδ soient *données de position*, on est forcé d'attribuer au terme ἅπτηται deux significations différentes, suivant que l'on considère le point δ ou le point ε. Car ce dernier se trouvant situé à l'intersection des deux droites αε, γδ, *données de position* par hypothèse, est *donné*, sans que l'on ait besoin d'attribuer à ἅπτηται la même signification qu'à δεδόμενον ῇ, puisqu'il suffit que le point ε soit quelque part sur la droite αε donnée de position. La rencontre de cette droite avec γδ achève de déterminer ce point. On ne peut d'ailleurs supposer que ἅπτηται signifie que ce point est *donné de position* sur αε, car, en premier lieu, ἅπτηται n'a pas la même signification que δεδόμενον ῇ, et ensuite ce serait là une condition *surabondante*, puisqu'on admet que le point ε est sur γδ. Si maintenant nous passons au point δ, comme on sait seulement qu'il doit se trouver quelque part sur γε, on est obligé alors d'interpréter ἅπτηται autrement qu'on ne l'a fait pour le point ε, et de supposer que ce terme signifie non-seulement que le point se trouve quelque part sur γε, mais encore qu'il y est *donné de position*. Pour qu'il y eût équivalence dans les conditions qui déterminent la position de chacun des points δ, ε, il faudrait que le droite βδ fût aussi donnée de position par l'énoncé même de la proposition; mais alors chacun des trois points δ, ε, ζ serait déterminé de la même manière que les deux autres, et la proposition n'aurait plus de raison d'être. Ainsi donc l'interprétation de M. Vincent rend nécessaire d'attribuer à ἅπτηται deux significations différentes, suivant que l'on considère le point δ ou le point ε. Or, au contraire, il est évident que Pappus attribue à ce terme une seule et même signification pour

ces deux points, d'où il résulte que certainement M. Vincent se trompe.

L'interprétation que j'ai adoptée n'est autre chose que celle de Simpson. Elle consiste simplement à assujettir chacun des points δ, ε à


Fig. 3.



se trouver situé sur une droite *donnée de position*, conformément au mot à mot, sans supposer, comme M. Vincent le fait arbitrairement, que ces droites *données de position* doivent être deux de celles qui forment le quadrilatère; car cette condition n'est pas exprimée dans le texte. Ainsi le point δ devra se trouver sur une droite θμ *donnée de position*. De même le point ε devra se trouver sur une autre droite θν, également *donnée de position*, et la proposition ainsi comprise a pour objet le *lieu géométrique* engendré par le point ζ, en supposant que les côtés du triangle δεζ pivotent autour des points *donnés* α, β, γ, sans que les sommets δ, ε cessent de se trouver sur les droites θμ, θν. Or ce *lieu* est une ligne droite θρ, qui passe par le point de rencontre θ des deux droites données θμ, θν. La proposition ainsi comprise est donc un *lieu*, comme on devait du reste s'y attendre, puisque Pappus la présente comme résumant dix propositions d'Euclide *qui appartenaient à l'espèce des lieux*. On remarque qu'elle n'est pas d'une simplicité triviale comme la proposition de M. Vincent.

Je ferai observer à ce sujet que la locution ἅπτεσθαι ou ἅψασθαι θέσει δεδομένης εὐθείας est employée un grand nombre de fois par Pappus pour exprimer qu'un point a pour *lieu géométrique* une droite *donnée de position*. On la trouve avec cette signification jusqu'à huit fois dans sa *Notice* sur les *Lieux plans*. On trouve encore très-fréquemment dans la même *Notice*, ainsi que dans celle sur les *Coniques* d'Apol-

lonius, la même locution où ces mots θέσει δεδομένης εὐθείας sont remplacés tantôt par περιφερείας κοίλης, tantôt par ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, tantôt encore par θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, θέσει δεδομένης κώνου τομῆς, θέσει δεδομένης γραμμῆς. Ainsi donc lorsque Pappus dit, en parlant des deux points que j'ai nommés δ, ε, ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, cela veut dire indubitablement que chacun de ces points a pour *lieu géométrique* une ligne droite *donnée de position*, sans y être *donné* lui-même de position; et lorsqu'il dit du point que j'ai nommé ζ, καὶ τοῦθ' ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας, cela veut dire que le point ζ *engendre un lieu géométrique*, et que *ce lieu est une ligne droite*. Soutenir que cela veut dire autre chose, c'est attribuer à Pappus deux langages différents, l'un admettant l'indétermination lorsqu'il parle des *lieux plans* et des *sections coniques*, l'autre excluant cette même indétermination lorsqu'il parle des *lieux* du *Traité des Porismes*, et cela dans trois *Notices* qui font partie de la préface de son septième livre.

(*n'*) M. Vincent conclut, dans sa *seconde Notice*, de ce qu'il n'est question ici que de *quatre* droites, que l'interprétation que j'ai adoptée est insoutenable. Il ajoute même que cette interprétation suppose que, par la locution *droite donnée de position*, Euclide et Pappus ont voulu dire *droite variable*. Mais il est évident que le savant helléniste se trompe sur ce dernier point; je n'ai jamais soutenu et personne n'a soutenu que *droite donnée de position* veut dire *droite variable* [*]. Je n'ai donc à m'occuper ici que de son argument qui consiste à prétendre que le texte indique seulement *quatre* droites, et non pas *sept*. Or le texte est explicite, il n'y a rien de sous-entendu. Pappus commence par considérer un *quadrilatère complet*, ce qui fait d'abord *quatre* droites. Il en introduit ensuite *deux* autres, sur lesquelles deux des sommets du quadrilatère sont assujettis à se trouver situés: ces deux nouvelles droites sont ajoutées aux *quatre* premières par l'énoncé

---

[*] *Voyez* à ce sujet dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XI) l'énoncé que je donne du théorème de Pappus. Il est évident que M. Vincent n'a pas lu cette partie de mon travail. S'il l'avait lue, il se serait abstenu de prétendre que j'ai dit qu'*une droite donnée de position est une droite variable*.

même. Que deux droites soient assujetties à se couper toujours sur une droite *donnée de position* (qui ne soit ni l'une ni l'autre des deux premières), c'est là une *condition* qui n'a rien de plus extraordinaire que celle qui consiste à rendre fixes les trois points où l'un des côtés du quadrilatère est rencontré par les trois autres. Quant à la *septième* droite, elle est une conséquence de l'hypothèse, c'est le *lieu engendré* par le dernier point. Tout cela est simple et parfaitement clair, il n'y a rien de sous-entendu dans l'énoncé dont il s'agit. Cet énoncé s'applique à un *système de quatre droites* que l'on assujettit à *diverses conditions*, et il faut bien que ces dernières y soient exprimées. D'ailleurs on ne voit pas comment elles pourraient l'etre dans d'autres termes que ceux qu'emploie Pappus, tandis qu'au contraire il est facile de reconnaître que ces mêmes termes ne peuvent exprimer la proposition de M. Vincent.

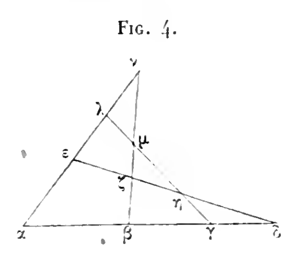
Je ferai enfin remarquer que cette proposition elle-même, telle qu'il la présente, ne s'accorde point avec ce qu'il a dit dans sa *première Notice* des propositions du *Traité des Porismes*, qui sont comprises dans son énoncé. M. Vincent supposait que ces propositions n'étaient autre chose que des *lemmes*, et il citait à ce sujet notamment la figure du septième lemme de Pappus, Or il est absolument impossible de retrouver dans aucun des trente-huit lemmes de ce géomètre la proposition de M. Vincent.

(o') Le savant helléniste a fait d'abord un énoncé complet, mais dépourvu de toute signification géométrique de ce qui n'est qu'une première hypothèse. Il est arrivé à ce résultat en substituant arbitrairement au subjonctif ἅπτηται, qui est dans le texte, l'indicatif ἅπτεται qui n'y est pas. Il reconnaît cette erreur dans sa *seconde Notice*, mais il donne à entendre que je pourrais bien en avoir commis ailleurs une autre du même genre, et que conséquemment un exces de sévérité de ma part rejaillirait infailliblement sur moi. Je ne prétends certes nullement me soustraire aux conséquences des erreurs que je puis avoir commises, mais je n'accepte pas l'honneur d'être placé, quant à ce, moi simple écolier en grec, sur le même rang que le maître. Au surplus, l'accusation ou plutôt l'insinuation de M. Vincent porte ici à faux. *Voir* à ce sujet l'annotation (z').

Quoi qu'il en soit, voyons si sa proposition, *en ne prenant que la*

première hypothèse, ce qui est évidemment permis, offre davantage un sens plausible, une signification vraiment géométrique. En voici l'énoncé, tel que M. Vincent l'accepte dans sa *seconde Notice : Tant de droites qu'on voudra se coupant les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont donnés et que chacun des points où l'une de ces dernières est coupée par les droites restantes soit (assujetti à être) situé sur une droite donnée de position, chacun des points restants sera pareillement (assujetti à être) situé sur une droite donnée de position*. Dans le cas de cinq droites, par exemple, la première partie de l'hypothèse consiste

Fig. 4.



en ce que les quatre points α, β, γ, δ, où l'une d'elles est rencontrée par les autres, sont donnés. Quant à la seconde, elle signifie que l'une des quatre autres droites, par exemple $\varepsilon\delta$, est donnée de position, et que les points ε, ζ, η sont donnés sur cette droite même, d'où il résulte que les trois dernières $\alpha\nu$, $\beta\mu$, $\gamma\lambda$ sont aussi données de position ; ou bien elle signifie que les points ε, ζ, η, où la droite $\varepsilon\delta$ est rencontrée par les droites $\alpha\nu$, $\beta\mu$, $\gamma\lambda$, sont *donnés* sur ces dernières, ce qui suppose également que toutes les droites du système sont données de position. La proposition aurait donc uniquement pour objet ce fait, que quand plusieurs droites sont données de position, leurs points d'intersection sont situés sur ces droites. Telle est la conséquence de l'interprétation de M. Vincent, lorsqu'on l'applique dans le cas de la première hypothèse. Le sentiment des choses géométriques repousse cette interprétation.

(p') En traduisant *situés chacun sur une des droites restantes*, au lieu du mot à mot *situés chacun* sur une droite *donnée de position*, M. Vincent fait dire au géomètre grec une chose qu'il aurait été parfaitement inutile d'exprimer. Car à quoi bon imposer pour condition qu'un cer-

tain nombre d'intersections des droites considérées soient situées sur ces droites elles-mêmes, et comment cette condition pourrait-elle n'être pas satisfaite? Il est vrai que M. Vincent revient au mot à mot dans sa *seconde Notice*, mais son interprétation de ce mot à mot est contraire à la signification que la locution ἅπτεσθαι ou ἅφεσθαι θέσει δεδομένης εὐθείας a toujours dans Pappus, ainsi que je l'ai fait observer ci-dessus dans l'annotation (*m'*).

(*q'*) Il s'agit ici d'une condition qui ne saurait être celle qu'exprime la traduction de M. Vincent, puisque déjà il est dit dans l'énoncé que les droites que l'on considère se coupent les unes les autres, *mais pas plus de deux en un même point*. D'ailleurs pourquoi serait-elle exprimée une seconde fois dans cet énoncé, et cela dans des termes différents? M. Vincent s'est déterminé dans sa *seconde Notice* à suivre mon mot à mot, avec cette seule restriction que l'espace triangulaire dont il est question serait formé par des droites *données de position*, au lieu de l'être, comme je le suppose, par des droites *non données de position*. Mais ensuite il juge à propos de remplacer ces mots *de manière que trois d'entre elles ne puissent passer par un même point*, par ceux-ci : *de manière que trois d'entre elles ne puissent aboutir aux angles d'un espace triangulaire* [*]. Bien certainement M. Vincent se sert ici de termes qui expriment toute autre chose que ce qu'il veut dire, car, pour satisfaire à cette condition, il faudrait que toutes les droites données, moins une, fussent parallèles entre elles, ce qu'il ne suppose pas. Lui-même, dans sa *première Notice*, croyant que j'avais dit quelque chose de semblable, le signalait comme une absurdité dans ces termes : « En effet, il n'est pas vrai que *trois points ne puissent être les sommets d'un même triangle*, puisque la figure ne peut au contraire exister qu'à cette condition. »

Ce que j'ai voulu exprimer et que M. Vincent a commencé par

[*] M. Vincent fait ici sur l'altération du texte des conjectures dans lesquelles je ne crois pas à propos de le suivre, puisqu'il arrive à une interprétation inadmissible. Mais je fais remarquer que je n'ai pas dit, comme il l'assure, que les manuscrits portent τρία et non τριῶν. *Voir* la note (*h*) de ma première traduction, où j'ai soin d'avertir que c'est le contraire qui a lieu.

prendre pour une absurdité, c'est que parmi les points, en nombre égal au nombre qui exprime le côté du nombre triangulaire, que l'on assujettit à être situés chacun sur une des droites *données de position* ou fixes, dont l'énoncé suppose l'introduction dans le système, entre autres conditions auxquelles il est soumis, il ne faut jamais qu'il y en ait trois qui soient les sommets de l'un des triangles formés par les droites *mobiles*, ce qui est un corollaire de la proposition relative au cas de *quatre* droites. Car, d'après cette proposition, dès que deux des sommets d'un tel triangle sont assujettis à demeurer chacun sur une droite fixe, le troisième sommet décrit ou engendre une ligne droite, que l'on ne peut plus conséquemment se donner à volonté. De même on ne peut assujettir à se trouver sur des droites arbitrairement choisies les quatre sommets d'un quadrilatère formé par les droites mobiles, ni les cinq sommets d'un pentagone. Ces dernières conditions ne sont pas indiquées par Pappus; c'est Simson qui les a fait connaître. n étant le nombre des droites *mobiles*, celui des points que l'on assujettit à se trouver sur des droites fixes est $n-1$. On satisfait à toutes ces conditions à la fois, en plaçant ces $n-1$ points aux différents sommets, moins un, de l'un quelconque des polygones qui ont pour côtés *toutes les droites mobiles* [*]. Ce polygone de n côtés que l'on choisit, change de position et de forme lorsque l'un quelconque de ses sommets se déplace sur la droite où il est assujetti à demeurer: *le dernier sommet décrit une droite, et chacun des points d'intersection qui n'appartiennent pas à ce polygone, décrit aussi une droite.*

(r') Les objections par lesquelles j'ai combattu l'interprétation donnée par M. Vincent, de la proposition relative au cas des quatre droites, s'appliquent également à la proposition générale de Pappus. Je renvoie donc pour cet objet aux annotations (m') et (n').

Toutefois il ne sera pas inutile d'ajouter que son interprétation tombe en défaut, lorsqu'on se borne à la première *hypothèse* de Pap-

---

[*] Ces explications ont été déjà données dans les *Objections* que j'ai précédemment adressées à M. Vincent. Dans sa *seconde Notice*, il déclare qu'il lui est impossible d'en suivre le sens. C'est là une nouvelle preuve qu'il n'a pas lu mon travail et qu'il raisonne en m'attribuant des propositions entièrement différentes de celles que j'ai avancées.

pus, c'est-à-dire à celle où il n'est nullement question de *nombre triangulaire*. M. Vincent n'a pas fait attention que cette circonstance est particulière à la seconde hypothèse. Cette remarque suffirait à elle seule pour prouver qu'il est dans l'erreur. Elle explique pourquoi il avait fait de la première hypothèse un énoncé complet: mais cet énoncé n'offrant pas de signification géométrique, il a rendu à cette partie de la proposition son caractère d'hypothèse. Or actuellement elle n'a pas davantage de signification géométrique, ainsi que je l'ai fait voir ci-dessus dans l'annotation (o').

(s') M. Vincent fait observer avec raison que j'avais omis de rendre le terme μόνα. J'ai réparé cet oubli et rectifié d'après lui ma traduction du commencement de la phrase. On remarquera du reste que le sens n'est pas changé par ces corrections.

(t') Le texte signifie mot à mot *de nombreuses et grandes foules* (*de propositions*). Comment M. Vincent, qui dit des *Porismes*

De loin c'est quelque chose et de près ce n'est rien,

vient-il parler ici de *belles propositions*, lorsque le texte ne dit rien de semblable?

(u') Ma traduction est rectifiée ici d'après le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 9°. Ce n'est pas par les *hypothèses* que chaque foule ou groupe de propositions se distingue des autres, car toutes les hypothèses sont différentes et d'ailleurs très-particulières, mais *par la chose demandée, qui est la même pour toutes les propositions du groupe, nonobstant la diversité de leurs hypothèses*, et cela soit qu'il s'agisse de choses que l'on découvre sans que l'énoncé de la question les fasse prévoir, ou de choses sur lesquelles cet énoncé appelle l'attention expressément.

M. Vincent n'a pas saisi le sens de cette distinction : perdant de vue ces expressions de Proclus, que j'ai déjà citées plusieurs fois, ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήζει, κ. τ. λ., il suppose que le terme συμβεβηκὸς s'applique aux choses *qui se présentent d'elles-mêmes*, c'est-à-dire à des *corollaires* dans le genre de ceux des éléments. Afin de fixer les idées à ce sujet, je prendrai un exemple. Supposons que l'on demande

de *découvrir la relation qui existe entre les segments interceptés par la tangente à un cercle sur deux autres tangentes parallèles entre elles, à partir des points de contact de ces dernières.* Cette relation est une chose que l'on recherche expressément, car on est certain, *par la nature même de la question,* qu'il existe en effet une relation entre ces deux segments, et dans ce cas elle est désignée avec beaucoup de justesse par le terme *ζητούμενον.* Tout le monde sait d'ailleurs qu'elle consiste en ce que *le produit ou rectangle des deux segments est constant et égal au carré du rayon.* Mais une fois qu'on l'aura trouvée, tout ne sera pas terminé, car un géomètre doué de pénétration saura apercevoir en outre *qu'il existe un point d'où la partie de la tangente variable interceptée entre les deux tangentes fixes est vue sous un angle constant.* Or la découverte de ce point remarquable ne paraît pas de nature à pouvoir être proposée *expressément,* comme celle de la relation segmentaire énoncée ci-dessus. Elle dépend de la sagacité du géomètre et surtout de l'*intuition.* Dans ce cas le terme συμβεβηκός caractérise parfaitement ce que l'on découvre. Ainsi donc il ne s'applique point à des choses d'une facilité vulgaire, comme M. Vincent l'imagine, mais au contraire à celles qui exigent au plus haut degré cette faculté que Pappus appelle δύναμις εὑρετική.

Le *Traité des Porismes* s'adressait aux géomètres *sachant voir et trouver,* δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν. On peut dire que ὁρᾶν et πορίζειν correspondent respectivement à ces deux termes συμβεβηκότα et ζητούμενα, et qu'ils indiquent la double aptitude dont il fallait être pourvu pour pouvoir résoudre des questions dans le genre de celles qu'on trouvait dans cet ouvrage.

(*v'*) Il résulte de cette phrase et des deux définitions du *Porisme,* que les choses que l'on découvrait, τὰ συμβεβηκότα et τὰ ζητούμενα, sont les *Porismes* mêmes. On voit ici pourquoi Pappus donne plus loin *les réponses sans les questions.* Celles-ci roulent sur des hypothèses qui toutes diffèrent les unes des autres, et l'objet important, le Porisme, consistant dans une réponse qui est unique et identique pour plusieurs questions différentes, il est tout simple que Pappus détache cette réponse pour la donner seule.

(*x'*) Il ne s'agit pas ici *de choses que l'on cherche à déduire des pro-*

positions, mais bien de choses que l'on cherche *dans les propositions*, car c'est là ce que le texte signifie. M. Vincent oublie toujours que Proclus oppose les *Porismes* aux *corollaires*, ὅσα ζητεῖται μὲν, κ. τ. λ.

(γ') Si l'on admet que Pappus renvoie en cet endroit aux *lemmes pour les Porismes* et non au premier livre des *Porismes*, il est naturel de supposer que ces expressions ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' désignent non point le commencement du septième lemme, mais le commencement de la partie du septième livre consacrée aux *lemmes pour les Porismes*. En effet, la proposition énoncée par Pappus s'adapte parfaitement à la figure qui accompagne le premier de ces lemmes. Cette circonstance appelle d'autant plus l'attention, que Pappus dit expressément que ce lemme se rapporte au premier Porisme du premier livre, et que, d'un autre côté, la proposition dont il s'agit semble être la première du premier livre.

Ces rapprochements, sur lesquels j'avais insisté dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*, paraissent avoir appelé l'attention de M. Vincent. Dans sa *seconde Notice*, il ne parle plus du commencement du septième lemme, mais s'attache particulièrement au premier lemme [*].

(ζ') ἀπὸ ἑτέρας ne veut pas dire *de la précédente droite*. Pour que cette signification fût admissible, il faudrait que ἑτέρας fût précédé de l'article, ce qui n'a pas lieu. Il faut traduire *d'une autre droite*, pour laquelle on sous-entend que les choses se passent comme pour la première, ce que j'indique entre crochets.

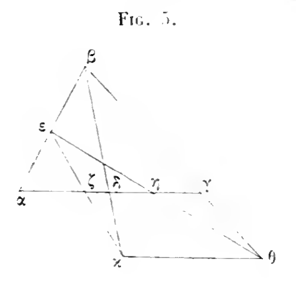
M. Vincent reconnaît dans sa *seconde Notice* que l'article manque en effet, mais il soutient qu'il a donné le sens. Pour le prouver, il a recours à la figure ci-après, qui est celle du premier lemme [**], et il

[*] M. Vincent, qui n'a pas lu mon travail, présente dans sa *seconde Notice* comme un *aveu* de ma part la relation que je signale entre la figure qui accompagne le premier lemme de Pappus et l'énoncé que ce géomètre donne au commencement de la partie de Notice où il *formule* les Porismes. De plus il oublie que lui-même n'avait parlé que du septième lemme dans sa *première Notice*. *Voyez* à ce sujet mes *Recherches nouvelles* (Commentaire, § XIII).

[**] M. Vincent : « Je reproduis cette figure dont M. Breton aurait dû expliquer la » construction, s'il la croyait propre à appuyer son système. C'est à quoi je vais en-

applique à cette figure l'énoncé que voici, en supposant que les points

Fig. 5.



γ, θ sont donnés ainsi que la droite $\alpha\gamma$, parallèle à $\varkappa\theta$, et les trois droites $\beta\alpha$, $\beta\varkappa$, $\beta\theta$ menées d'un même point β.

« Si des deux points donnés $\varkappa$, θ, on mène deux droites qui se rencontrent sur la droite $\alpha\beta$, qui est donnée de position, et que l'une d'elles, $\varkappa\varepsilon$, intercepte sur la droite $\alpha\gamma$, qui est donnée de position, le segment $\alpha\zeta$ compté à partir du point α, l'autre droite $\varepsilon\theta$ interceptera sur la précédente un segment $\alpha\eta$ qui sera au premier dans le rapport donné $\alpha\delta : \alpha\gamma$. »

Or voici ce que j'ai dit à ce sujet dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XIII, 2e alinéa).

« .... La figure qui accompagne le lemme I est bien dans les conditions indiquées. η et ζ seraient les points ou pôles fixes, $\alpha\beta$ la droite sur laquelle les droites mobiles sont assujetties à se couper, $\gamma\theta$, $\delta\varkappa$ les deux segments dont le rapport doit être constant. » Or c'est précisément ce qu'on retrouve dans le mot à mot que voici :

« Si de deux points donnés ζ, η on mène deux droites se coupant sur la droite $\alpha\beta$, donnée de position, et que l'une d'elles $\zeta\varepsilon$ détermine sur la droite $\beta\delta$, donnée de position, le segment $\delta\varkappa$, à partir du point δ donné sur cette dernière, la seconde $\eta\varepsilon$ déterminera aussi sur une autre [droite $\beta\gamma$, donnée de position, à partir du point γ donné sur cette droite] un segment $\gamma\theta$ qui sera au premier dans un rapport donné, le même que celui des longueurs $\beta\delta$, $\beta\gamma$. » Il n'est donc nullement nécessaire de traduire ἑτέρας par *la précédente* ou *la même*.

» core suppléer. » Nouvelle preuve que le savant helléniste n'a pas lu mon travail. Je reproduis un peu plus bas l'explication qu'il prétend que je n'ai pas donnée.

C'est ici le lieu de m'expliquer sur l'accusation de M. Vincent, dont j'ai dit un mot dans l'annotation (o'), et qu'il formule de cette manière : « M. Breton... paraît avoir commis une inexactitude analogue en con-
» fondant le subjonctif ἀποτέμνῃ avec le futur ἀποτεμεῖ, dans l'énoncé
» du premier Porisme du premier livre, celui même où la figure est
» indiquée. Et l'erreur est ici de quelque gravité, car le membre de
» phrase que M. Breton a supprimé, ou du moins qu'il a négligé de
» mettre en saillie, est précisément celui qui a pour fonction *d'ajouter*
» *ce qui manque à l'hypothèse du théorème local* [*]; celui, par con-
» séquent, qui caractérise essentiellement le Porisme. D'ailleurs
» M. Breton insiste beaucoup sur la nécessité d'une traduction *mot à*
» *mot*. Or on comprend que pour obtenir une exactitude rigoureuse
» sous ce rapport, il n'est pas du tout indifférent de confondre l'anté-
» cédent indiqué par ἀποτέμνῃ, avec le conséquent, déterminé par
» ἀποτεμεῖ. »

Si M. Vincent veut dire que ma traduction de l'énoncé dont il s'agit ne donne pas le mot à mot, il a parfaitement raison; mais il n'est pas vrai que cette inexactitude, si toutefois c'en est une, soit analogue à celle que lui-même a commise, car j'ai conservé à la proposition sa signification géométrique, et je n'ai pas négligé de mettre en saillie ce qui constitue le *Porisme*. En effet, j'ai dit dans mes *Recherches nouvelles* (Commentaire, § XIII, à la fin du premier alinéa) : « A notre point de
» vue, le Porisme ne peut être ici que le fait de la constance du rapport
» de ces deux segments ($\gamma\theta$, $\delta\varkappa$). » Le reproche de M. Vincent est donc dépourvu de fondement [**]. Quant à avoir confondu un *subjonctif* avec un *futur*, je n'ai pas davantage commis cette faute. Il n'y a dans ma traduction ni *futur*, ni *subjonctif*, mais seulement le présent de l'indicatif.

---

[*] Ce langage suppose, ce me semble, que M. Vincent abandonne ici tout à fait son interprétation de la seconde définition du *Porisme* pour adopter la mienne. Faut-il conclure de là qu'il est, au fond, converti sur ce point, comme on pourrait être tenté de le croire d'après quelques remarques qui se sont déjà offertes dans le cours de la discussion? *Voir* l'annotation (u).

[**] On voit encore ici que M. Vincent n'a pas lu le travail auquel il oppose ses deux Notices.

Je fais enfin observer qu'en insistant sur la nécessité d'une interprétation *littérale*, je n'ai point prétendu exiger un mot à mot *à outrance* qui pourrait n'être pas conforme au génie de notre langue. J'ai voulu seulement une traduction *qu'on pût retrouver dans le mot à mot*. C'est ce qui n'arrive pas toujours pour celle de M. Vincent.

(a'') Ce *Porisme* est conçu dans des termes qui impliquent l'idée de *mouvement*. Voir plus haut l'annotation (m').

(b'') Je me sers ici à dessein de termes qui indiquent qu'il s'agit de figures *variables*, ainsi que cela est nécessaire si l'on veut que la seconde définition du *Porisme* ait eu sa raison d'être

(c'') Je n'ai pas d'autres motifs de traduire ἀποτομή par *abscisse* ou *segment*, que ceux que M. Vincent donne lui-même. Quant au participe ἀποτεμνομένη, qu'il dit être employé pour rendre en grec le mot *abscisse*, je ne l'ai jamais trouvé qu'accompagné d'un *complément*. D'ailleurs πρὸς ἀποτομήν, traduit par *suivant la section de raison*, ne présente à l'esprit aucun sens géométrique.

(d'') M. Vincent dit qu'il lui est impossible de deviner la raison qui a pu m'engager à changer le texte de ce Porisme. Il aurait pu, sans chercher à deviner, la lire dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XIV).

(e'') M. Vincent prétend que les mots ἕως δοθέντος ne sont point rendus dans ma version. En me lisant avec plus d'attention, il pourra reconnaître que ce reproche n'est pas fondé. Toutefois, afin de me rapprocher davantage du mot à mot, j'ai modifié ma rédaction dans ce Porisme et dans cinq autres, où l'on trouve ces mêmes mots ἕως δοθέντος.

L'introduction de l'idée de rapport *commensurable* est incompatible avec la variabilité des figures, que suppose essentiellement la seconde définition du Porisme. Même observation pour six autres Porismes où M. Vincent introduit cette idée.

(f'') J'ai remplacé, dans ma traduction, *rectangle* par *espace*, le terme χωρίον ne désignant pas nécessairement un rectangle comme M. Vincent le fait remarquer.

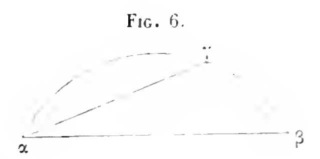
Mais il ajoute : « De même, dans la traduction du premier énoncé du » deuxième livre d'Apollonius, M. Breton me paraît s'être trompé : au » lieu de la *différence des carrés, etc.*, il fallait mettre simplement » *l'espace compris entre les deux droites* : c'est le théorème local donné » par Proclus, appliqué au triangle ; le lieu en question est celui du » sommet du triangle formé par les deux droites et la distance des deux » points donnés : c'est une parallèle à la droite qui joint ces deux » points. » M. Vincent se trompe ici complétement. Le *lieu* dont il parle est l'objet du *quatrième énoncé du premier livre*, et cela *de la manière la plus explicite*. Il est donc certain que j'ai bien fait de ne pas traduire le premier énoncé du deuxième livre comme M. Vincent croit que j'aurais dû le faire [*].

(g'') Même observation que dans l'annotation (c'') ci-dessus, relativement à la manière dont je rends le terme ἀποτομή. Πρὸς ἀποτομήν, traduit par *suivant la section de l'espace*, ne présente à l'esprit aucune signification géométrique, pas plus que *suivant la section de raison*. Même observation pour six autres Porismes.

(h'') Rien dans le texte ne signifie que les droites dont il est question dans ce Porisme et qui sont menées d'un point donné, doivent aboutir à deux points *donnés*.

Suivant M. Vincent, ce Porisme dépend évidemment du lemme XXIX de Pappus. « Or, dit-il, ce qui manque ici à l'énoncé du théorème local, » c'est la détermination du sommet du triangle. » Je rappelle que ce lemme XXIX de Pappus est ainsi conçu : *Un segment de cercle étant décrit sur* $\alpha\beta$, *y inscrire un angle* $\alpha\gamma\beta$ *dont les côtés soient entre eux*

Fig. 6.



dans un rapport donné. M. Vincent suppose-t-il que la question à ré-

---

[*] Ceci répond au *post-scriptum* de la *seconde Notice* de M. Vincent où il oublie ce qu'il avait dit dans la *première*.

soudre est celle-ci : *Sur une droite donnée $\alpha\beta$ construire un triangle semblable à un triangle donné?* On pourrait alors, en effet, construire sur $\alpha\beta$ le segment capable de l'angle opposé, dans le triangle donné, au côté homologue à $\alpha\beta$, et il ne resterait plus qu'à déterminer sur l'arc $\alpha\beta$ le sommet du triangle demandé. Mais y a-t-il dans tout cela quelque chose qu'on puisse appeler *Porisme*, qui exige de l'*invention*, etc.? Les circonstances qui, selon Proclus, font le Porisme, manquent ici absolument.

(*i''*) Dans ce Porisme, de même que dans le précédent, M. Vincent suppose, sans y être autorisé par le texte, que les droites menées du point donné doivent aboutir à des points également *donnés*. Il fait dépendre ce Porisme du même lemme, en ce sens que la circonstance indiquée dans sa traduction se vérifie en plaçant le sommet du triangle au milieu de l'arc; ce qui revient à dire que *les cordes menées du milieu d'un arc aux extrémités de cet arc sous-tendent des arcs égaux*. Assurément si une semblable proposition se distingue par quelque côté, ce n'est pas par l'*invention*.

(*k''*) M. Vincent suppose encore que les deux cas de ce Porisme se rapportent à des problèmes déterminés, et que le lemme XXIX en donne également la clef. Suivant lui, il s'agit de la tangente menée par le sommet γ du triangle $\alpha\beta\gamma$, laquelle est parallèle à $\alpha\beta$, ou fait avec cette droite un angle donné, selon que le sommet γ est ou non au milieu de l'arc $\alpha\beta$. A peine est-il besoin de faire observer ici la même absence des caractères que Proclus signale dans les Porismes. Le sentiment des choses géométriques s'élève contre de semblables interprétations.

2°. *Passages extraits de Proclus.*

(*l''*) Ce *Porisme* est évidemment le *corollaire* des éléments modernes de géométrie. Proclus le considère comme un *théorème*.

(*m''*) C'est encore ce même *corollaire* qui est désigné ici et que Proclus considère comme un *théorème*.

(*n''*) Ces expressions ὅσα ζητεῖται μὲν signifient *toutes choses que*

l'on recherche expressément, et non point, comme M. Vincent le fait dire à Proclus (sans y être en rien autorisé par le texte), *des notions comprises implicitement dans l'objet d'une question.* Il s'agit ici de choses que l'on recherche *pour elles-mêmes*, et qui par là se distinguent essentiellement des *corollaires*.

(*o''*) M. Vincent dénature encore le sens de ce passage en traduisant εὑρέσεως δὲ χρῄζει par *mais où il y a cependant quelque chose de particulier à inventer*. Le Porisme *exige de l'invention*, c'est là son caractère spécial. Pappus le définit : *une chose que l'on demande de découvrir*.

(*p''*) M. Vincent attribue à γενέσεως une signification inadmissible. γένεσις ne peut, en aucune manière, être traduit par *exécution pratique*. Il est manifeste que ce terme correspond à γένεσθαι que l'on trouve très-souvent employé pour désigner la conséquence d'une hypothèse. Ces expressions γενέσεως μόνης, s'appliquent aux choses que l'on déduit de notions acquises, mais sans que l'*invention* y ait part.

(*q''*) M. Vincent se trompe encore ici, en supposant que θεωρίας ἁπλῆς se rapporte à la théorie, et que le *Porisme* est ainsi intermédiaire entre la *théorie* et la *pratique*. Ces termes complètent la pensée de Proclus. Après avoir appelé l'attention sur cette circonstance que le *Porisme demande de l'invention*, il ajoute d'abord que les choses qu'on déduit sans invention de notions acquises ne sont pas des *Porismes*. Mais il y a aussi d'autres choses auxquelles on parvient par un raisonnement, une théorie *à priori*. Ces dernières ne sont point considérées comme étant des *Porismes*, si ce raisonnement ou cette théorie se présente à l'esprit sans qu'on ait besoin de chercher, et c'est là ce que signifie l'adjectif ἁπλῆ.

(*r''*) Ces mots θεωρῆσαι δεῖ signifient qu'il faut *voir* la chose. Telle est, ajoute Proclus, la connaissance que nous avons des choses qui *sont*. M. Vincent ne rend pas la pensée de l'auteur. L'intention de celui-ci est de rappeler l'idée du *théorème*, puis celle du *problème*, pour faire comprendre ensuite ce qui distingue le *Porisme* du *théorème* et du *problème*.

(s″) Rien dans le texte ne signifie qu'*il ne s'agit que d'acquérir la connaissance* de la chose.

(t″) M. Vincent se trompe évidemment en traduisant *ce ne sont pas des créations*. Les questions citées par Proclus sont, au contraire, de telle nature, qu'il faut, pour les résoudre, tout *créer*, raisonnement et construction. *Voyez* ci-dessus l'annotation (p″) relativement au sens de γένεσις.

(u″) Rien dans le texte ne signifie *quoiqu'il y ait quelque chose à trouver*. Ces mots ἀλλ' εὑρέσεις veulent dire simplement *mais des inventions*, et c'est là l'idée sur laquelle Proclus insiste particulièrement sans parvenir à éveiller l'attention de M. Vincent.

(v″) Ces mots θεωρία ψιλή ne veulent pas dire *des théorèmes abstraits*. Si l'on essaye de faire le mot à mot avec les significations attribuées par M. Vincent pour γενέσεις et pour θεωρία ψιλή, on arrive à faire dire à Proclus une chose parfaitement fausse, savoir : qu'*il n'y a, dans ces* [*exemples*] *de choses demandées, ni constructions, ni théorie abstraite*.

(x″) Pour bien comprendre le sens de cette phrase et de celles qui précèdent, il faut se reporter aux deux propositions d'Euclide citées par Proclus. Voyez, à ce sujet, mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § VIII). Il est à remarquer que ces indications de Proclus sont contraires aux définitions du *Porisme* que M. Vincent prête à Pappus, savoir : 1° que *le Porisme est ce qu'on ajoute pour mettre à profit un résultat obtenu*, et 2° que *le Porisme est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local* (*pour détruire l'indétermination*).

(y″) La mention que Proclus fait ici expressément des *Porismes* d'Euclide, en appliquant ainsi à ces Porismes ce qu'il vient de dire, est fort importante. On se demande toutefois jusqu'à quel point il a voulu établir une assimilation entre deux propositions qui appartiennent aux *éléments* et les *Porismes* proprement dits. Peut-être Proclus a-t-il seulement emprunté à Euclide, dans la préface ou dans la lettre

qui, vraisemblablement, précédait le *Traité des Porismes*, les exemples donnés par ce géomètre lui-même pour montrer qu'il existe des propositions qui se distinguent à certains égards, et surtout par l'*invention*, des *théorèmes* et des *problèmes*.

(z'') J'ai cru devoir m'arrêter là, parce que ce qui suit dans Proclus se rapporte uniquement à ce que nous appelons les *corollaires*. Il ne s'agit plus des *Porismes*, c'est-à-dire de *ces choses que l'on recherche expressément et qui exigent de l'invention*, mais seulement de ces *théorèmes* qui se présentent comme par hasard dans certaines démonstrations, sans qu'on les ait cherchés ni proposés. M. Vincent, qui prend, ainsi qu'on l'a vu, les *Porismes* pour des *corollaires*, a jugé à propos de citer tout ce que Proclus dit de ces derniers : « Pour faire bien » voir que les deux sortes de porismes ne diffèrent pas autant qu'on » l'a pensé, ou plutôt, qu'il n'y a essentiellement qu'une sorte de porisme. A mon avis, continue le savant helléniste, la seule distinction » que l'on puisse établir entre eux avec quelque apparence de raison, » consiste en ceci : que certains porismes se présentent comme à l'aventure τὰ συμβεβηκότα : ce sont ceux que l'on rencontre dans les » Éléments, κοινὰ ζτοιχεῖα; tandis que les autres, dépendant d'une » déduction moins simple, moins directe, moins élémentaire, ne se » découvrent que lorsqu'on les cherche, τὰ ζητούμενα, après s'être » préalablement livré à l'étude des théories moins vulgaires, afin » d'acquérir, comme le dit Pappus, la *puissance inventive*, δύναμις » εὑρετική. Ce sont ces derniers porismes qui composent les livres » d'Euclide sur la matière, ainsi que les autres traités compris dans » le Τόπος ἀναλυόμενος; et si Proclus semble établir une division plus » ou moins tranchée entre les deux classes (non entre les deux espèces), c'est uniquement parce que, devant se borner à commenter » les éléments, il n'avait point à s'occuper de porismes qui ne s'y rencontrent pas : voilà tout ce qu'il a voulu dire, et dont il a cru devoir » avertir ses lecteurs. »

Pour montrer combien M. Vincent se trompe en assimilant ainsi les *Porismes* aux *corollaires*, il suffit de rappeler que Proclus cite, pour donner une idée du *Porisme*, deux propositions dont l'une est ainsi conçue : *Trouver le centre d'un cercle donné*. Or quelle ressem-

blance y a-t-il entre cette proposition, qui est un *problème,* et un *corollaire*, qui, d'après Proclus, est un *théorème*?

Il est vrai que la proposition dont il s'agit a un corollaire, savoir que *la perpendiculaire élevée par le milieu d'une corde passe par le centre*. Mais Proclus n'en parle que dans le passage consacré aux *corollaires,* après avoir, en termes exprès, averti le lecteur qu'il cesse de parler des *Porismes*. M. Vincent n'est pas arrêté par cette déclaration si formelle de Proclus. Entraîné par une inexplicable préoccupation, il applique à ce corollaire et à d'autres la dénomination de *Porisme,* et confond ainsi ce que l'auteur grec a manifestement voulu séparer.

Pour la signification des termes συμβεβηκότα et ζητούμενα, *voyez* ci-dessus l'annotation (*u'*).

Résumé et Conclusions.

Il résulte avec évidence des annotations qui précèdent que M. Vincent s'est trompé en un très-grand nombre d'endroits dans son interprétation des textes de Pappus et de Proclus, et notamment partout où il a cru devoir proposer un autre sens que celui que j'ai adopté. Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que la plupart de ces erreurs, et les plus graves, sont la conséquence de l'idée fausse que le savant helléniste s'est faite du *Porisme* et par laquelle il s'est laissé entraîner. D'après lui, le *Porisme* est une chose que l'on ne recherche pas expressément pour elle-même, mais seulement *une chose que l'on fait remarquer;* en un mot, dans sa pensée, le *Porisme* est un véritable *corollaire*, qui, comme tel, *ne fait pas partie* de la proposition à laquelle il se rapporte. La seule différence que M. Vincent admette entre les corollaires et les Porismes consiste en ce que ces derniers dépendent « d'une » déduction moins simple, moins directe, moins élémentaire. »

Or cette manière d'envisager le *Porisme* est en contradiction formelle avec ce que nous apprennent Pappus et Proclus, et, notamment, il n'est pas vrai que le *Porisme* doive être séparé comme il arrive pour le *corollaire,* de la proposition à laquelle il se rapporte. Il en constitue, au contraire, une partie essentielle, analogue à *l'affirmation* dans le *théorème,* à la *solution* dans le *problème*. En effet :

1°. Pappus définit le *Porisme* : *une chose qu'on demande de décou-*

vrir, et Proclus : *une chose que l'on recherche expressément et qui exige de l'invention*, confirmant ainsi la définition de Pappus. Proclus appuie ses explications de deux exemples, en ayant soin d'ailleurs de mettre en relief la différence entre le *Porisme* et le *corollaire*. Dans chacun de ces deux exemples, le *Porisme* est bien une partie essentielle de la proposition, et non point une chose que l'on fait remarquer et qui s'ajoute à une proposition complète par elle-même. Il est vrai que M. Vincent traduit tout autrement que je ne le fais les deux définitions que je viens de rappeler, mais sa traduction n'a évidemment aucun rapport avec le mot à mot, soit pour le sens, soit pour les termes, et pour la proposer, il est obligé de traduire les définitions du *théorème* et du *problème* d'une manière contraire aux notions que l'on a sur ces deux espèces de propositions.

2°. Le passage où Pappus appelle l'attention sur ce fait que dans les propositions relatives aux *Porismes*, ce qu'il faut considérer, ce n'est pas *l'hypothèse*, mais la *chose cherchée* qui se trouve être la même dans un grand nombre *d'hypothèses différentes ;* ce passage, dis-je, prouve également que la *chose cherchée*, c'est-à-dire le *Porisme*, fait partie intégrante de la proposition où il est mis en évidence.

3°. Le *Porisme*, tel que M. Vincent le conçoit, ne peut pas être mis sous forme de *problème*. Or dans les deux passages de Proclus où il est question du *Porisme* et du *corollaire*, ce commentateur applique expressément la dénomination de *théorème* aux choses qui se présentent à la manière du *Porisme* de M. Vincent, et il désigne par deux fois, sous le nom de *problèmes*, les *Porismes* d'Euclide. De plus, Pappus dit positivement que les énoncés des propositions du *Traité des Porismes* pouvaient être mis sous la forme qui convient soit aux *théorèmes*, soit aux *problèmes*, de sorte qu'il y avait discussion entre les géomètres sur la question de savoir si ces propositions étaient des *théorèmes* ou des *problèmes*. Il est bien évident que cette discussion n'aurait pas pu avoir lieu si les Porismes avaient été ce que suppose M. Vincent. Tout le monde les aurait considérés comme appartenant au genre des *théorèmes*.

4°. Pappus donne, comme résumant dix *lieux* du premier livre du *Traité des Porismes*, une proposition dans laquelle on ne voit rien qui ressemble à ce que M. Vincent présente comme étant le *Porisme*. Aussi

le savant helléniste suppose-t-il que ce sont simplement des *lemmes*, tandis que l'intention de Pappus est bien de donner sous un énoncé unique des *propositions* tirées de l'ouvrage même d'Euclide, et non des *lemmes*.

Ainsi donc, M. Vincent se trouve contredit formellement par les textes en ce qu'il y a de plus important dans son interprétation, à savoir la notion du *Porisme*.

Cette conception du savant helléniste est d'ailleurs contraire aux textes sous un autre rapport, je veux parler du caractère *d'invention* qui résulte de l'ancienne définition du *Porisme* citée par Pappus, et que Proclus met en relief avec une insistance et une intention bien marquées. Il oppose même en cela le *Porisme* au *corollaire* qui est un *théorème* qu'on rencontre, sans le chercher, dans la démonstration d'une proposition ayant un tout autre objet. Il appelle l'attention sur cette circonstance que le *Porisme* non-seulement est l'objet d'une *recherche expresse*, mais encore exige de *l'invention*. Pour lui, il n'y a *Porisme* que là où il y a *invention*, et il a soin de dire que les simples conséquences de propositions déjà démontrées ne remplissent pas cette condition, et qu'il en est de même des théories à priori qui ne demandent aucun effort d'esprit. Or le *Porisme*, tel que M. Vincent le conçoit, n'offre en aucune façon ce caractère *d'invention*, du moins dans le cas des propositions *locales*, où il faudrait admettre suivant lui que ce qui constitue essentiellement le Porisme n'est autre chose que le choix que l'on fait de la grandeur ou de la situation d'une partie variable de la figure pour faire disparaître l'indétermination.

L'objection devient encore plus pressante lorsqu'on voit une circonstance de cette nature présentée comme étant la définition même du *Porisme*. M. Vincent soutient en effet que la seconde définition du Porisme, dont Pappus nous a transmis les termes, doit être interprétée en ce sens que le Porisme serait *ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse d'un théorème local pour y détruire l'indétermination*, c'est-à-dire le simple choix de la grandeur et de la situation d'une partie de la figure, variable d'après l'hypothèse. Or la définition dont il s'agit est présentée en termes *généraux*, du moins rien dans Pappus ne fait supposer qu'elle ne s'appliquait pas à la totalité des propositions d'Euclide, et elle n'aurait pas eu de raison d'être si elle n'eût été applicables à toutes sans exceptions. Voilà donc le Porisme se réduisant à

quelque chose d'absolument dépourvu non-seulement d'invention, mais encore de tout caractère saillant. Il est évident que le sentiment des choses géométriques repousse une pareille supposition.

Remarquons que si cette définition n'est pas conforme à la vraie notion du *Porisme*, elle nous apprend, toutefois, que les propositions de l'ouvrage d'Euclide étaient des propositions *locales*. Or il a été établi ci-dessus que chacune de ces propositions devait renfermer, comme partie intégrante, le *Porisme* qui en était l'objet. Donc, il n'est pas vrai de dire que le Porisme avait pour effet de détruire l'indétermination; il la laissait, au contraire, subsister. Ainsi donc, de ce côté encore, les idées de M. Vincent sont inadmissibles.

Peut-être est-ce pour échapper à ces objections qu'il se laisse aller à donner le nom de Porismes à des propositions locales, sans y avoir détruit l'indétermination, c'est-à-dire avant d'y avoir introduit son prétendu Porisme; mais alors sous quel rapport distingue-t-il ces propositions des autres propositions du même genre auxquelles les anciens n'ont pas donné le nom de Porisme? Il ne fait que déplacer la difficulté. Pour la faire disparaître, il suffit de considérer le Porisme comme étant la conséquence d'une *hypothèse* et non de la *démonstration d'une proposition*. Cette solution si simple est celle que j'ai proposée, elle répond à tout.

On le voit, l'interprétation que M. Vincent oppose à la mienne est viciée dans son principe même. Il ne faut donc pas s'étonner si sa traduction est attaquable sur un si grand nombre de points; tout cela est, comme je l'ai dit, la conséquence d'une idée préconçue. C'est ainsi qu'indépendamment des définitions, des groupes importants de détails sont rendus d'une manière que le mot à mot ne peut justifier; que là où Pappus annonce une proposition résumant dans son énoncé dix *lieux* du premier livre du *Traité des Porismes*, M. Vincent donne une proposition qui n'est pas un *lieu*, etc.; qu'enfin il en vient à dire :

De loin c'est quelque chose et de près ce n'est rien,

d'un ouvrage dont Pappus fait une éminente distinction parmi d'autres écrits des géomètres grecs, traitant pour la plupart de questions qui, même de nos jours, ne sauraient être considérées comme faciles à résoudre.

Je fais remarquer en terminant que cette discussion laisse subsister les conclusions que j'ai émises dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XVII), et que le seul changement à y apporter consiste en ce qu'au lieu d'attribuer la seconde définition du *Porisme* au grand nombre de questions relatives aux *lieux* que renfermait le *Traité des Porismes*, il faut considérer cette seconde définition comme s'appliquant généralement à *toutes* les propositions de ce Traité, lesquelles étaient, sans exception, des *propositions locales*. Cette rectification rend les conclusions dont il s'agit plus nettes, sans en changer le sens.

CORRECTIONS POUR LES RECHERCHES NOUVELLES SUR LES PORISMES.

(1re serie, t. XX, p. 209 à 304.)

Page 211, ligne 1 *après ces mots* les Porismes d'Euclide, *ajoutez* en trois livres.
211, ligne 6 du texte grec en remontant, *au lieu de* οὕτως; , *lisez* οὕτως· .
213, ligne 2 du texte grec en remontant, *au lieu de* πορισμάτον, *lisez* πορισμάτων,
214, note [*f*], *après ces mots* tel qu'on le trouve, *ajoutez* dans Halley.
214, note [*f*], *au lieu de* Δεδομένον, *lisez* δεδομένον.
215, note [*g*], *au lieu de* παρυπτίον, *lisez* παρύπτιον.
217, ligne 13, *au lieu de* point fixe, que, etc., *lisez* point fixe; que, etc.
217, ligne 8 en remontant, *au lieu de* le rectangle, *lisez* du rectangle.
217, ligne 10 en remontant, *au lieu de* côté, *lisez* côtés.
247, ligne 1 du texte grec en remontant, *au lieu de* ἁπλῆς; , *lisez* ἁπλῆς· .
258, ligne 8 de la note, *au lieu de* ex, *lisez* ea.
260, ligne 10, *au lieu de* trouver une des lignes, *lisez* trouver des lignes.
268, ligne 2 en remontant, *au lieu de* proportions, *lisez* propositions.
270, ligne 15 en remontant, *au lieu de* partie, *lisez* portée.
282, ligne 4, *au lieu de* qui n'est pas, *lisez* qui n'est que.
303, 2e enoncé, *au lieu de* un rayon connu, *lisez* un rapport connu.
303, note, *après le mot* Paris, *ajoutez* 1845.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

PREMIER ARTICLE.

J'avais entrepris avec une extrême ardeur dans le courant de l'année dernière des recherches sur divers points de la théorie des nombres que des occupations nouvelles et impérieuses m'ont, à mon grand regret, obligé trop tôt d'abandonner. Ne pouvant espérer d'avoir de longtemps la liberté d'y revenir, surtout de les reprendre dans leur ensemble et dans leur tendance vers un même but, je me décide à publier morceau par morceau, et à mesure que je disposerai de quelques minutes, ceux des résultats auxquels j'étais déjà parvenu qui peuvent encore offrir de l'intérêt quand on les considère isolément. Je réclame pour ce travail ingrat et décousu l'indulgence du lecteur.

La première formule que je donnerai contient une fonction $f(x)$ qui doit être paire, ou plutôt qui doit être telle que l'on ait

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x qu'on a à employer : ces valeurs seront ici des nombres entiers pairs, en sorte que l'on pourrait poser, par exemple,

$$f(x) = (-1)^{\frac{x}{2}}.$$

J'admets aussi que pour chacune de ces valeurs de x, la valeur de $f(x)$ est bien déterminée. La fonction $f(x)$ est du reste une fonction quelconque, algébrique ou numérique.

Soit m un nombre impair donné à volonté. Décomposons $2m$ en deux parties impaires m', m'', de manière que l'on ait

$$2m = m' + m'',$$

m' prenant successivement les valeurs

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ 2m-3,\ 2m-1.$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires ou correspondantes

$$2m-1,\ 2m-3,\ldots,\ 5,\ 3,\ 1.$$

Désignons généralement par d' un quelconque des diviseurs de m', et par d'' un quelconque des diviseurs du nombre correspondant m''; puis formons la somme triple

$$S=\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}.$$

Les deux premières sommations se rapportent aux diviseurs d', d'' de chacun des groupes m', m'', et le troisième $\sum$ indique que l'on doit faire le total des sommes partielles ainsi obtenues pour les groupes successifs

$$1,\ 2m-1;\quad 3,\ 2m-3;\ldots;\quad 2m-1,\ 1.$$

La valeur de la somme complète S peut toujours être exprimée simplement au moyen des diviseurs d de l'entier impair donné m. Je trouve en effet que

$$S=\sum d[f(0)-f(2d)].$$

Ainsi l'on a

$$\text{(A)}\quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}=\sum d[f(0)-f(2d)].$$

Soit, par exemple, $m=3$, les décompositions de $2m$ seront

$$1+5,\quad 3+3,\quad 5+1.$$

Pour chacun des deux groupes extrêmes les valeurs absolues de $d'-d''$ et de $d'+d''$ (on n'a besoin que des valeurs absolues puisque $f(-x)=f(x)$ par hypothèse) sont respectivement 0 et 4 pour $d'-d''$, 2 et 6 pour $d'+d''$: pour le groupe du milieu 3,3, elles

sont 2, 4, 4, 6 et 0, 0, 2, 2. Le premier membre de la formule (A) s'exprime donc par

$$2[f(0)+f(4)-f(2)-f(6)]+2f(0)+2f(2)-f(2)-2f(4)-f(6),$$

ce qui se réduit à

$$4f(0)-f(2)-3f(6).$$

Or au second membre, où d doit prendre les deux valeurs 1 et 3, on trouve

$$f(0)-f(2)+3[f(0)-f(6)];$$

c'est bien la même valeur qu'au premier membre.

La formule (A) peut être établie par différents moyens. Je réserve la démonstration pour un autre moment, me bornant aujourd'hui à indiquer quelques applications des plus simples.

Posons

$$f(x)=x^2,$$

d'où

$$f(d'-d'')-f(d'+d'')=-4d'd'',$$

et

$$f(0)-f(2d)=-4d^2.$$

En changeant donc les signes des deux membres et divisant par 4, la formule (A) nous donnera

$$\sum\left(\sum\sum d'd''\right)=\sum(d^3).$$

La double somme

$$\sum\sum d'd''$$

n'est autre chose que le produit de $\sum d'$ par $\sum d''$, c'est-à-dire le produit de la somme des diviseurs de m' par la somme des diviseurs de m''. En désignant donc à notre ordinaire par $\zeta_\mu(m)$ la somme des puissances de degré μ des diviseurs de tout nombre m, nous aurons

$$\sum\left(\sum\sum d'd''\right)=\sum\zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

ou si l'on veut,

$$\sum\left(\sum\sum d' d''\right) = \sum \zeta_1(n)\zeta_1(2m-n),$$

la sommation au second membre portant actuellement sur n dont les valeurs successives sont $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$.

Quant à $\sum(d^3)$, c'est la somme des cubes des diviseurs d de m, ou autrement dit, c'est $\zeta_3(m)$. On a donc, pour tout nombre impair m,

$$\zeta_3(m) = \sum \zeta_1(n)\zeta_1(2m-n),$$

ou bien, sans signe sommatoire,

$$\zeta_3(m) = \zeta_1(1)\zeta_1(2m-1) + \zeta_1(3)\zeta_1(2m-3) + \ldots + \zeta_1(2m-1)\zeta_1(1).$$

Nous avons fait usage de cette formule dans le cahier précédent (page 85). Ce n'est, comme on voit, qu'un cas très-particulier de la formule (A).

Soit à présent

$$f(x) = x^5,$$

et la formule (A) nous donnera

$$\sum\left[\sum\sum(d'^3 d'' + d''^3 d')\right] = 2\sum(d^5).$$

Le second membre s'exprime immédiatement par $2\zeta_5(m)$. Quant au premier membre, j'observe que la somme

$$\sum\sum(d'^3 d'' + d''^3 d')$$

est formée de deux parties

$$\sum\sum(d'^3 d''), \quad \sum\sum(d''^3 d'),$$

évidemment égales entre elles, parce que les valeurs de m'' sont dans l'ordre inverse les mêmes que celles de m'. Cette somme se réduit

donc à

$$2\sum\sum(d'd''^3),$$

c'est-à-dire au double du produit

$$\sum d' \cdot \sum d''^3,$$

ou enfin au double de

$$\zeta_1(m')\,\zeta_3(m'').$$

On a donc finalement, pour tout nombre impair m,

$$\zeta_5(m) = \sum \zeta_1(m')\,\zeta_3(m''),$$

ou, si l'on veut,

$$\zeta_5(m) = \sum \zeta_1(n)\,\zeta_3(2m - n),$$

le signe sommatoire portant sur les valeurs $1, 3, 5, \ldots 2m - 1$ de n.

Comme $\zeta_1(m)$ exprime le nombre des décompositions du quadruple de l'entier impair m en une somme de quatre carrés impairs, la formule

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'') = \zeta_3(m)$$

montre que $\zeta_3(m)$ est le nombre des décompositions de $8m$ en une somme de huit carrés impairs; et, cela étant, la formule

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_3(m'') = \zeta_5(m)$$

indique à son tour que $\zeta_5(m)$ est le nombre des décompositions de $16m$ en une somme de huit carrés impairs faisant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs. En effet, pour opérer sur $16m$ toutes les décompositions dont il s'agit, il faut prendre de toutes les manières possibles

$$16m = 8m'' + 2.4m',$$

m' et m'' étant les mêmes entiers impairs que dans notre équation

$$2m = m' + m'',$$

puis décomposer $8m''$ en huit carrés impairs et $4m'$ en quatre carrés impairs, et enfin combiner entre elles de toutes les manières possibles ces décompositions, ce qui donne pour chaque groupe un nombre d'expressions marqué par

$$\zeta_3(m'')\zeta_1(m').$$

De là pour les groupes réunis ce nombre complet

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_3(m'')$$

que nous voyons être égal à $\zeta_5(m)$. C'est donc bien par $\zeta_5(m)$ que s'exprime, pour tout nombre impair m, le nombre des décompositions de $16m$ en une somme de huit carrés impairs faisant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs.

En prenant pour $f(x)$ une puissance paire de x de degré de plus en plus élevé, on arrive ainsi à trouver pour $\zeta_7(m)$, $\zeta_9(m)$, $\zeta_{11}(m)$, etc., une interprétation qui porte toujours sur la décomposition des nombres en sommes de carrés. Mais les résultats ne sont plus si nets et les énoncés se compliquent beaucoup. C'est ce que l'on verra déjà pour

$$f(x) = x^6.$$

On arrive alors à la formule

$$8\zeta_7(m) = 3\sum \zeta_1(m')\zeta_5(m'') + 5\sum \zeta_3(m')\zeta_3(m''),$$

qui conduit au théorème suivant : m étant un nombre impair donné à volonté, désignons par P le nombre des décompositions de $16m$ en une somme de seize carrés impairs dont les huit premiers et les huit derniers séparément fassent des multiples impairs de 8, et par Q le nombre des décompositions de $32m$ en une somme de huit carrés impairs donnant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le

double d'une somme de quatre carrés impairs, plus enfin le quadruple d'une dernière somme de quatre carrés impairs aussi. Nous aurons

$$8\zeta_7(m) = 5\mathrm{P} + 3\mathrm{Q}.$$

Nous nous contenterons d'indiquer le résultat pour

$$f(x) = x^{2\mu},$$

savoir

$$2^{2\mu-1}.\zeta_{2\mu+1}(m) = \frac{2\mu}{1}\sum\zeta_1(m')\zeta_{2\mu-1}(m'')$$
$$+\frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{1.2.3}\sum\zeta_3(m')\zeta_{2\mu+3}(m'')+\ldots$$
$$+\frac{2\mu}{1}\sum\zeta_{2\mu-1}(m')\zeta_1(m'').$$

Les coefficients sont ceux de rang pair dans la formule du binôme : les termes à égale distance des extrêmes dans le second membre sont égaux. La formule est curieuse et pourra être utile.

Comme dernière application de la formule (A), soit

$$f(x) = \cos xt,$$

t désignant une constante quelconque. Nous trouverons

$$\sum\left(\sum\sin d't.\sum\sin d''t\right) = \sum(d\sin^2 dt).$$

En donnant à t des valeurs particulières, on déduit de là diverses formules qui ont de l'intérêt.

Faisons, par exemple, $t = \frac{\pi}{2}$, et l'équation

$$\sum\left(\sum\sin\frac{d'\pi}{2}\cdot\sum\sin\frac{d''\pi}{2}\right) = \sum d,$$

qu'on obtiendra, et qui peut s'écrire

$$\sum\left(\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}\cdot\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right) = \zeta_1(m),$$

nous ramènera au théorème si connu de Jacobi concernant la décomposition de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs. On serait arrivé au même résultat en prenant

$$f(x) = (-1)^{\frac{x}{2}}.$$

Faisons encore $t = \frac{\pi}{3}$, et il nous viendra

$$\sum\left(\sum \sin\frac{d'\pi}{3} \cdot \sum \sin\frac{d''\pi}{3}\right) = \sum\left(d \sin^2\frac{d\pi}{3}\right),$$

formule de laquelle il nous serait aisé de conclure le nombre des décompositions de $2m$ sous la forme

$$x^2 + 3x'^2 + y^2 + 3y'^2,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Mais nous aimons mieux consacrer une Note spéciale à la proposition dont nous parlons et à d'autres propositions analogues. Notre objet pour le moment est d'indiquer des formules générales et non de développer dans leurs détails les applications particulières. Nous ne présentons des exemples qu'autant qu'il en faut pour bien montrer le sens précis de nos formules.

Nous en avons donc assez dit sur la formule (A). Plus tard nous la compléterons à divers points de vue, en remplaçant, par exemple, le nombre impair m par un nombre pair ou impair à volonté, ou bien le nombre pair $2m$ par un nombre impair m ou plutôt par un nombre quelconque. Mais dès aujourd'hui je veux donner à nos résultats une extension considérable, sans changer la nature du nombre m que je regarde toujours comme impair, ainsi que les deux nombres m', m'' dont la somme fait $2m$.

Continuons à désigner par d un quelconque des diviseurs de m, et par d' ou d'' un quelconque des diviseurs de m' ou m''; mais de plus représentons par δ, δ', δ'' les diviseurs complémentaires, en sorte que l'on ait

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'':$$

puis formons la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}$$

où les deux premiers $\sum$ portent sur les diviseurs d', δ', d'', δ'' des deux nombres m' et $m''=2m-m'$, et où le troisième $\sum$ indique qu'on doit faire le total des sommes partielles prises d'abord pour chaque groupe m', m''. La fonction $f(x, y)$ est supposée telle que, pour chaque valeur de x ou de y employée, on ait

$$f(-x, y)=f(x, y), \quad f(x, -y)=f(x, y).$$

Cela posé, je dis que la somme triple obtenue comme on vient de le marquer, est égale à la somme très-simple

$$\sum d[f(0, 2d)-f(2d, 0)].$$

Ainsi on a

$$\text{(B)} \quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}=\sum d[f(0, 2d)-f(2d, 0)].$$

La formule (B) se réduit à la formule (A) quand on remplace la fonction $f(x, y)$, qui est à deux variables, par une fonction $f(x)$ d'une seule variable.

On pourra, si l'on veut, remplacer la formule (B) par celle-ci :

$$\text{(C)} \quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(d'+d'', \delta'-\delta'')]\right\}=\sum d[f(0, 2d)-f(2d, 0)],$$

qui lui est tout à fait équivalente

En prenant

$$f(x, y)=\cos xt \cos yz,$$

où t et z sont deux constantes à volonté, et en posant, pour abréger, et relativement à tout entier impair $m=d\delta$,

$$\sum \sin dt \cos \delta z=\psi(m), \quad \sum \cos dt \sin \delta z=\varpi(m),$$

la formule (C) fournit ce résultat remarquable

$$\sum \psi(m')\psi(m'') - \sum \varpi(m')\varpi(m'') = \sum d(\sin^2 dt - \sin^2 dz),$$

qui donne lieu à beaucoup de conséquences intéressantes.

Je terminerai ce premier article en donnant une formule qu'on pourra rapprocher de la formule (A), dans laquelle du reste elle rentre au fond. Pour l'obtenir, je pose dans la formule (C) :

$$f(x, y) = (-1)^{\frac{y}{2}} f(x),$$

ce qui est permis, parce que y est un nombre pair : on suppose, bien entendu, que $f(-x) = f(x)$. En observant que l'on a

$$(-1)^d = -1,$$

que de plus

$$(-1)^{\frac{\delta'-\delta''}{2}} = -(-1)^{\frac{\delta'+\delta''}{2}} = (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}.(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}$$

et

$$(-1)^{\frac{\delta'+\delta''}{2}} = -(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}.(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}},$$

on obtient

$$\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} [f(d'-d'') + f(d'+d'')] \right\} = \sum d[f(0) + f(2d)].$$

Cette formule m'a paru bonne à transcrire; mais, je le répete, on pourrait la déduire de la formule (A) : elle n'en diffère pas essentiellement.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

LES CONIQUES D'APOLLONIUS;

Par M. HOUSEL.

Nous savons que les mathématiciens de l'antiquité avaient des notions très-étendues sur les sections coniques, mais nous savons aussi qu'ils ne connaissaient pas les méthodes analytiques au moyen desquelles on étudie aujourd'hui ces courbes. Nous avons donc un certain intérêt à rechercher comment ils ont pu découvrir la plus grande partie des théorèmes que nous connaissons maintenant sur ce sujet.

Le plus illustre des savants anciens qui ont écrit sur les sections coniques est Apollonius, de Perge, en Pamphylie. Il vivait à Alexandrie, cette nouvelle Athènes des successeurs d'Alexandre, sous Ptolémée Evergète, vers l'an 244 avant Jésus-Christ.

Son ouvrage se compose de huit livres dont le sujet nous est connu par une lettre qu'il écrivit à Eudème, et par les *Collections mathématiques* de Pappus, mais pendant longtemps on n'a possédé que les quatre premiers. Une traduction arabe des trois livres suivants fut découverte, en 1658, par le mathématicien Borelli, dans la bibliothèque des Médicis. Plus tard, on a encore trouvé d'autres manuscrits arabes de ces trois livres; mais le huitième livre paraît complétement perdu.

Avant d'analyser l'ouvrage d'Apollonius, il est nécessaire de rechercher, je ne dis pas l'état de la science avant ses travaux, ce qui serait assez difficile, mais du moins la définition que l'on donnait avant lui des différentes espèces de sections coniques. Voici comment Pappus expose ces anciennes définitions.

Dans un cône circulaire quelconque, droit ou oblique, menons un plan arbitraire par l'axe, c'est-à-dire par la ligne qui joint le sommet au centre de la base, ce plan déterminera au sommet du cône un angle droit, aigu ou obtus; puis, imaginons un plan perpendiculaire à l'un des côtés de cet angle et voyons quelle sera la nature de la section déterminée par ce nouveau plan sur la surface conique.

Si l'angle du sommet est droit, on aura une courbe indéfinie sur une seule nappe du cône, c'est-à-dire une parabole; si l'angle est aigu, on obtiendra sur une seule nappe une courbe fermée, c'est-à-dire une ellipse; enfin, si l'angle est obtus, on aura sur chaque nappe deux branches infinies, ou bien une hyperbole.

Mais Apollonius observa que les trois espèces de sections pouvaient être obtenues d'un même cône; il parvint ainsi à rédiger un traité aussi complet qu'on pouvait l'espérer à cette époque et que le monde savant s'est contenté de commenter pendant bien des siècles.

Le premier livre d'Apollonius a pour but de définir les sections coniques et d'obtenir leurs équations au moyen des diamètres conjugués.

Ce mot d'*équation* pourrait étonner si l'on pensait que les anciens n'eussent aucune connaissance de l'analyse : assurément, la discussion de l'équation générale du second degré à deux variables n'était pas à leur portée, mais ils n'en avaient pas moins une méthode de calcul appliquée à la géométrie, dont on trouve dans Euclide une foule d'exemples, quelquefois assez compliqués, tels que la mesure du segment sphérique. Cette méthode, qui nous semble aujourd'hui exiger beaucoup plus d'efforts d'esprit que le mécanisme de l'algèbre, mais qui leur était sans doute rendue plus facile par une habitude constante, consistait à obtenir, par les proportions qu'ils maniaient très-habilement, des expressions capables d'être construites géométriquement.

Quant à l'idée même des *coordonnées*, elle est tellement simple, que les anciens n'ont pu manquer de la concevoir : les mots même d'*abscisses* et d'*ordonnées* se trouvent dans Apollonius et étaient certainement employés avant lui. Cela ne diminue en rien la gloire de notre Descartes qui a fécondé cette pensée au point d'en tirer une science toute nouvelle.

Dans le cours de l'analyse que nous entreprenons, nous serons souvent forcé, pour éclaircir et surtout pour abréger les démonstrations, de nous rapprocher des usages et des calculs modernes : mais il sera toujours sous-entendu que, dans les constructions géométriques de l'auteur, on parvient, au moyen d'un nombre suffisant de moyennes proportionnelles, à n'avoir qu'un seul facteur au numérateur et au

dénominateur d'une expression quelconque; s'il y a, au contraire, un facteur commun à supprimer entre ces deux termes, cela revient à considérer le rapport de deux rectangles qui ont une dimension commune et qui sont entre eux comme leurs autres côtés. De plus, quand le numérateur et le dénominateur d'une expression contenaient beaucoup de facteurs, les anciens la décomposaient dans le produit de deux ou de plusieurs rapports, et cette expression était dite la *raison composée* (λόγος συγκείμενος) de ces rapports ou raisons.

Nous verrons que, sauf ces différences de forme, les méthodes d'Apollonius ressemblent quelquefois à celles que l'on emploie encore aujourd'hui.

Apollonius ne s'occupe pas seulement du cône droit de la géométrie élémentaire: il considère immédiatement le cône circulaire oblique, engendré par une droite qui s'appuie constamment sur une circonférence en passant toujours par un sommet donné. Il démontre que tout plan passant par ce sommet détermine un triangle dont un des côtés est une corde du cercle de base; que toute section parallèle à cette base est aussi un cercle, et enfin il prouve, comme on le fait maintenant, l'existence du cercle sous-contraire ou anti-parallèle : ensuite il pose, comme lemme fondamental, la proposition suivante (livre I, prop. 6):

Par l'axe du cône, c'est-à-dire par la droite qui joint le sommet au centre du cercle de base, imaginez un plan quelconque, qui coupera le cône suivant un triangle qu'on appelle *triangle par l'axe* et dont la base est un diamètre du cercle; dans le plan de ce cercle, menez une perpendiculaire à ce diamètre, et enfin, par un point quelconque pris sur la surface du cône, menez une parallèle à cette perpendiculaire: le plan mené par l'axe divisera cette parallèle en deux parties égales.

Ce théorème est facile à démontrer par des triangles semblables, en menant par cette parallèle et par le sommet du cône un plan qui coupe le cercle de base suivant une perpendiculaire au diamètre indiqué.

D'après cela, concevez un plan qui coupe la base suivant une perpendiculaire à ce diamètre, vous obtiendrez évidemment une section conique dont l'intersection avec le triangle par l'axe sera un diamètre

transverse, comme coupant en deux parties égales une série de cordes parallèles, et rencontrant la section conique que l'on considère au point où le plan sécant rencontre à la fois le plan mené par l'axe et le cône ; si vous prenez pour base le cercle passant par ce point, vous obtiendrez une droite tangente à la section conique et parallèle aux cordes divisées en deux parties égales par le diamètre qui aboutit au même point.

Le triangle par l'axe a évidemment deux côtés passant par le sommet du cône; le premier de ces côtés passant par le point que nous venons de déterminer sur la section, cette courbe sera une parabole si le diamètre transverse est parallèle au second de ces côtés; elle sera une ellipse, s'il rencontre ce second côté sur la même nappe que le premier, et une hyperbole s'il le rencontre sur l'autre nappe. Mais il faut observer que les anciens ne donnaient le nom d'hyperbole qu'à la moitié de la courbe que nous appelons ainsi, et que les deux parties de cette courbe, comparées l'une à l'autre, portaient le nom de *sections opposées*.

Prenons donc pour origine des coordonnées le point de la courbe que nous avons déterminé; le diamètre transverse sera l'axe des abscisses, et la tangente que nous avons menée à l'origine sera l'axe des ordonnées. Apollonius parvient alors à l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2$$

de la même manière que les modernes, c'est-à-dire en menant par un point quelconque de la courbe un plan parallèle à la base du cône : il est bien entendu que les sinus sont remplacés par des rapports de lignes. La parabole a pour équation $y^2 = 2px$; c'est la courbe par *égalité*; si q est négatif, c'est-à-dire s'il faut retrancher quelque chose de $2px$, on a l'ellipse, ou la courbe par *défaut*; enfin, s'il faut ajouter quelque chose à $2px$ pour avoir y^2, on obtient l'hyperbole, ou la courbe par *excès*; ainsi se trouvent justifiées les dénominations de ces trois courbes.

Ensuite considérant la section, telle que l'ellipse, dans son plan et indépendamment du cône, l'auteur transporte l'origine au milieu du diamètre transverse, en diminuant les abscisses de la moitié de ce dia-

mètre, ce qui lui donne l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ici a est la moitié du diamètre transverse, et b est la moitié du diamètre *droit*, c'est-à-dire du second diamètre, parallèle aux ordonnées et conjugué du premier. Seulement, ce mot de diamètre *droit* (ὀρθία) ne doit pas induire en erreur et faire croire que ces deux diamètres sont nécessairement perpendiculaires. Au contraire, comme on peut mener une infinité de triangles par l'axe, il s'agit d'un système quelconque de diamètres conjugués.

On appelle *côté droit* le coefficient $2p = \frac{2b^2}{a}$, et l'on nomme *figure* le parallélogramme fait sur le diamètre transverse $2a$ et sur le côté droit $\frac{2b^2}{a}$, pris dans la direction du diamètre droit, c'est-à-dire de la tangente à l'extrémité du premier diamètre; ainsi $2b$ sera une moyenne proportionnelle entre les deux côtés de la figure.

Ces définitions s'appliquent aussi à l'hyperbole, mais on voit que, pour cette dernière courbe, le diamètre droit n'est autre chose que le diamètre non transverse.

Dans les trois sections le *côté droit* $2p$ est une ligne dont la longueur est déterminée par les éléments du cône et la position du plan sécant : mais dans l'ellipse cette quantité se trouve encore au moyen du second diamètre, qui est lui-même transverse; dans l'hyperbole, au contraire, c'est la valeur du côté droit qui fait connaître celle de b^2.

L'équation ordinaire

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de l'ellipse et de l'hyperbole, fait voir, par une simple considération de triangles égaux, que toute corde passant par le milieu commun des diamètres conjugués a et b s'y trouve divisée en deux parties égales: ce milieu est donc un *centre*.

Les trois sections étant toujours rapportées à un système de diamètres conjugués, Apollonius cherche l'équation de la tangente en un point donné de la courbe, à peu près par la méthode suivante, que nous appliquerons seulement à l'ellipse.

Soient x' et y' les coordonnées d'un point pris sur l'ellipse : on a la relation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

On démontre par une considération géométrique très-simple que tout autre point du plan donnera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

suivant que ce point sera extérieur ou intérieur à l'ellipse. Cela posé, je dis que la droite qui aura pour équation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

sera tangente à la courbe, parce que tous les points de cette droite donneront l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

En effet, à la quantité $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ajoutons

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

et retranchons

$$\frac{2xx'}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 2,$$

la quantité qui en résultera se présentera sous la forme

$$\frac{(x - x')^2}{a^2} + \frac{(y - y')^2}{b^2},$$

ou bien sous cette autre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

et la première étant évidemment positive, la seconde doit l'être aussi.

L'équation de la tangente étant ainsi trouvée, l'auteur en conclut différents théorèmes plus ou moins importants : dans l'ellipse et l'hyperbole, la distance du centre au point où la tangente rencontre le diamètre transverse est troisième proportionnelle à la moitié de ce diamètre et à l'abscisse du point de contact; dans la parabole, la soustangente est double de l'abscisse, etc.... Mais surtout il fait voir qu'il y a une infinité de diametres conjugués.

Pour le démontrer, considérons l'ellipse rapportée à ses diametres primitifs et menons une tangente par un point quelconque A de la courbe; d'un autre point B, pris aussi arbitrairement sur l'ellipse, menons une parallèle à cette tangente et cherchons l'autre point C où cette parallèle rencontre encore la courbe ainsi que le point D où elle coupe le diamètre OA; nous parviendrons à reconnaître, par le calcul et la comparaison des abscisses, que $BD = DC$; donc OA divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente en A, ce qui prouve que cette ligne mérite en effet le nom de diamètre.

On a déjà vu, pour le système primitif, que si une droite passant par le centre divisait en deux parties égales un système de cordes parallèles, cette propriété était réciproque pour la droite menée par le centre parallèlement à ces cordes; en répétant ce raisonnement, fondé sur la symétrie de l'équation ordinaire, on verrait que OA fait un système de diamètres conjugués avec la droite menée par le centre parallèlement à la corde BC.

La démonstration est la même pour l'hyperbole. Ces théorèmes (propositions 47 et 48) dépendent de lemmes démontrés dans les n°s 41, 43, 44 et 45. Quant à la parabole, on montre (proposition 46) que si l'on mène par le point de contact une parallèle au diamètre primitif, cette parallèle divisera en deux parties égales les cordes parallèles à la tangente; donc dans la parabole tous les diamètres sont parallèles entre eux. Ce théorème dépend d'un lemme démontré proposition 42.

La proposition 49 fait voir que l'équation de la parabole a la même forme pour un système quelconque de diamètres conjugués. C'est ce que l'auteur a déjà prouvé relativement à l'ellipse et à l'hyperbole, au moyen des lemmes et théorèmes que nous avons indiqués.

Les propositions 50 et 51 ont un énoncé très-compliqué, mais qui se ramène, quant à ses conséquences que nous verrons dans le septième livre, au théorème que voici :

Soient OA *et* OB, OA′ *et* OB′ *deux systèmes quelconques de diamètres conjugués de l'ellipse; au point* A′ *menons une tangente qui coupe* OA *en* M *et* OB *en* N, *nous aurons*

$$\overline{OB'}^2 = A'M.A'N.$$

Même résultat pour l'hyperbole.

A la fin du premier livre, l'auteur se propose de construire les trois coniques d'après certaines données, et pour cela il revient aux considérations de l'espace, en cherchant à placer ces courbes sur un cône qui sera droit si l'on donne les axes rectangulaires. Ces dernières propositions sont donc inverses des premières, où il s'agissait de couper un cône par un plan; elles sont même identiques au fond, puisqu'il s'agit toujours d'établir une relation entre les éléments de la courbe et ceux du cône. D'ailleurs Apollonius revient là-dessus à la fin du sixieme livre.

Nous n'insisterons pas sur ces solutions, mais on voit du moins que l'auteur cherche à préciser la forme des courbes en considérant les axes rectangulaires.

Le second livre commence par la théorie des asymptotes de l'hyperbole; mais ici l'auteur revient avec raison à un système de diamètres conjugués.

D'un point quelconque de l'hyperbole, Apollonius mène une tangente sur laquelle il prend de chaque côté du point de contact une longueur égale au demi-diamètre non transverse conjugué du diamètre transverse qui passe par ce point; puis il joint le centre aux points ainsi obtenus, et démontre que ces droites de jonction, nommées asymptotes, ne rencontrent jamais la courbe; il montre aussi que toute autre droite, menée dans l'intérieur de l'angle des premières, rencontre nécessairement la courbe.

Les raisonnements de l'auteur reviennent à comparer l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de l'hyperbole avec les équations

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a}$$

des droites ainsi définies sous le nom d'asymptotes.

Tout cela se rapporte au système de diamètres conjugués dont le transverse passe par le point de contact; mais, comme on vient de trouver les limites entre toutes les droites qui, passant par le centre, rencontrent ou ne rencontrent pas la courbe, il est clair que ces limites seront toujours les mêmes, quel que soit le système de diamètres conjugués, et c'est là ce qui démontre que toute tangente à l'hyperbole, comprise entre les asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact.

Ensuite, considérant une tangente à une conique quelconque et une corde parallèle à cette tangente, Apollonius démontre que la droite qui joint le point de contact et le milieu de la corde est un diamètre de la courbe. Appliquons ce théorème à l'hyperbole, et considérons le diamètre en question qui passe par le point de contact et divise la corde en deux parties égales; nous avons vu qu'il partageait de même la portion de la tangente comprise entre les asymptotes, et nous verrons, par des triangles semblables, que la portion de la sécante, comprise entre les asymptotes, est aussi divisée dans le même rapport; donc, en prenant la différence de part et d'autre, on reconnaîtra que les parties d'une corde comprises entre les asymptotes et l'hyperbole sont égales.

D'après cela l'auteur parvient à l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; c'est-à-dire à démontrer que si l'on prend deux points quelconques sur une hyperbole, et que l'on considère les coordonnées de ces deux points en prenant pour axes les asymptotes, le rectangle des coordonnées de l'un de ces points sera équivalent au rectangle de l'autre; il suffit pour cela d'appliquer le théorème précédent à la droite qui joint ces deux points.

Enfin, cette relation entre les parallèles aux asymptotes, qu'il est facile d'étendre à des perpendiculaires à ces mêmes droites, conduit au théorème fondamental : les asymptotes s'approchent indéfiniment de la courbe.

La théorie des asymptotes se termine par quelques considérations sur les *sections opposées conjuguées*.

Nous avons déjà vu qu'on entendait par sections opposées les deux parties de l'hyperbole comprises dans le même angle des asymptotes : dans l'angle supplémentaire formé par ces asymptotes, imaginons une autre hyperbole dont un diamètre transverse soit un diamètre non transverse de la première, et réciproquement ; les deux parties de cette autre courbe seront les sections opposées *conjuguées* de l'hyperbole donnée.

Cette considération est utile en ce qu'elle permet d'appliquer à l'extrémité du diamètre non transverse d'une hyperbole les théorèmes qui ont été démontrés pour l'extrémité du diamètre transverse, c'est-à-dire pour un point de la courbe, en observant que la parallèle menée au diamètre transverse par l'extrémité de ce diamètre non transverse est tangente à une hyperbole qui a les mêmes asymptotes que la première. On reconnaîtra ainsi que la portion de cette parallèle comprise dans l'angle supplémentaire des asymptotes est divisée en deux parties égales au point que nous avons indiqué, et l'on trouvera aussi les expressions des distances interceptées par cette parallèle sur les axes des coordonnées, c'est-à-dire sur les diamètres.

Après quelques théorèmes sur la manière dont les cordes et les tangentes se coupent en dedans ou en dehors des coniques, et même, pour l'hyperbole, en dedans ou en dehors de l'angle des asymptotes, Apollonius démontre la proposition suivante :

Dans toute conique, la droite qui joint le point de concours de deux tangentes avec le milieu de la corde de contact est un diamètre de la section.

Ce théorème est une conséquence évidente de l'expression trouvée dans le premier livre et qui donne la distance où une tangente rencontre un diamètre transverse quelconque, en fonction de ce diamètre et de l'abscisse du point de contact. Si nous prenons pour direction des abscisses, c'est-à-dire, pour le diamètre transverse en question, celui qui passe par le point de concours des deux tangentes, les deux points de contact auront nécessairement la même abscisse ; donc aussi, d'après l'équation de la courbe, les carrés de leurs ordonnées seront les mêmes, ce qui démontre la proposition.

Viennent ensuite certains problèmes, dans lesquels on suppose la conique *donnée*, c'est-à-dire complétement construite.

Étant donnée une section conique, trouver un diamètre de cette section (problème indéterminé). On mène deux cordes parallèles dont on joint les milieux.

En faisant deux fois cette opération pour l'ellipse et l'hyperbole, on trouve le centre.

Quant aux axes rectangulaires, on obtiendra ceux de la parabole en menant une perpendiculaire à la direction commune des diamètres, et élevant, par le milieu de la corde ainsi obtenue, un diamètre qui sera l'axe et coupera la courbe au sommet.

Pour avoir les axes de l'ellipse, on décrira, en prenant comme centre celui de la courbe, une circonférence de rayon arbitraire, mais néanmoins coupant l'ellipse en quatre points ; menant les bissectrices des angles formés par ces points pris deux à deux, on a les directions des axes, dont les grandeurs sont données par les intersections de ces bissectrices avec la courbe.

La même construction donnera les directions des axes de l'hyperbole et la grandeur de l'axe transverse. Quant à celle de l'axe non transverse, voici comment on l'obtiendra : le système primitif de diamètres conjugués a donné les asymptotes comme diagonales du parallélogramme fait sur ces diamètres ; comme les sommets du rectangle construit sur les axes se trouvent aussi sur les asymptotes, on aura l'axe non transverse.

Enfin Apollonius démontre, par une réduction à l'absurde (livre II, proposition 58), qu'il n'y a dans les coniques, excepté la circonférence, qu'un seul système d'axes, c'est-à-dire de diametres conjugués rectangulaires.

Cette dernière proposition fait voir que l'intention de l'auteur a été ici de démontrer et de préciser l'existence des axes, plutôt que de les construire exactement. En effet, les indications précédentes doivent paraître peu scientifiques, mais la solution complète de ces problemes exige des principes qui ont été découverts par Apollonius lui-même, et que l'on ne trouvera que dans le septième livre.

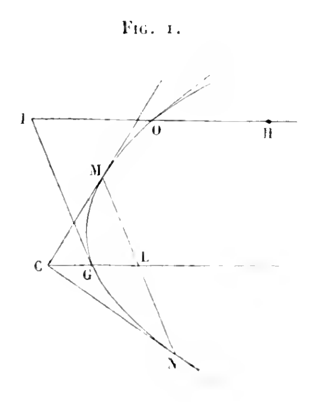
Enfin le second livre se termine par divers problèmes sur les tangentes ; mais nous ferons observer d'avance que les solutions d'Apol-

lonius ne sont point fondées sur les propriétés des foyers, dont la théorie ne paraîtra que dans le troisième livre.

On propose de mener d'un point donné une tangente à une conique. Nous supposerons immédiatement le cas le plus général, celui dans lequel le point donné est extérieur.

Considérons d'abord la parabole rapportée à un système d'axes conjugués, dont l'un est le diamètre quelconque OH, et l'autre la tangente au point O (*fig.* 1). Du point donné C menons un diamètre qui coupe

Fig. 1.

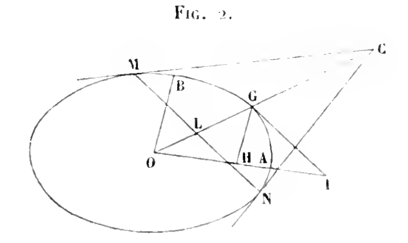


la courbe en G; du point G menons à la tangente en O la parallèle GH qui coupe OH en H, et soit pris sur le premier diamètre OI = OH; on sait, par la propriété de la sous-tangente, que IG sera une tangente en G. Sur le diamètre CG prenons GL = GC, et du point L menons à IG une parallèle qui coupe la courbe en M et en N; les droites CM et CN seront les tangentes demandées.

On voit qu'il faut déterminer d'abord la tangente parallèle à la corde de contact.

On trouvera par la même méthode (*fig.* 2) les tangentes menées

Fig. 2.



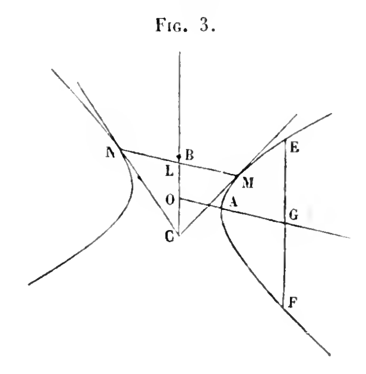
d'un point extérieur C à l'ellipse dont le centre est O, et qui est rapportée aux diamètres conjugués OH et OB. Joignez OC qui coupe la courbe en G; soit H le point où la parallèle GH à OB coupe OA, et prenez la troisième proportionnelle $OI = \frac{\overline{OA}^2}{OH}$, la droite GI sera tangente en G.

Maintenant supposons le problème résolu, et soit MN la corde de contact qui coupe OG en L; comme on peut supposer l'ellipse rapportée au diamètre OG et à son conjugué, nous aurons $OL.OC = \overline{OG}^2$, ce qui donne OL et le point L, par lequel on mène à GI une parallèle qui sera la corde de contact et qui coupera l'ellipse aux points demandés M et N.

La construction sera la même pour l'hyperbole, si les deux points de contact sont sur la même section, c'est-à-dire si le point donné C est compris dans l'angle des asymptotes; cela tient à ce que OC coupera la section en G. Il sera même plus facile que pour l'ellipse de mener en ce point G la tangente qui doit être parallèle à la corde de contact, car il suffira, à l'aide d'un problème connu, de faire passer par ce point G une droite qui s'y trouve divisée en deux parties égales entre les asymptotes.

Mais si le point donné C est dans l'angle supplémentaire des asymptotes (*fig.* 3), les deux points de contact étant chacun sur une des sec-

Fig. 3.



tions opposées, il n'y aura pas de tangente parallèle à la corde de contact, parce que le diamètre OC ne sera pas transverse, ce qui ne l'empêchera point de passer par le milieu L de cette corde MN et de

donner la relation

$$\overline{OB}^2 = OL.OC,$$

en appelant OB la longueur du demi-diamètre non transverse dans la direction de OC. Voici d'abord comment on trouvera cette valeur OB : menez une corde quelconque EF parallèle à OC, soit G le milieu de cette corde, et joignez OG qui coupe la courbe en A ; connaissant OA et les asymptotes, on aura OB en construisant un parallélogramme. Dès lors la relation

$$OL = \frac{\overline{OB}^2}{OC}$$

détermine le point L, et si l'on mène de ce point une parallèle à OA, on trouve les points M et N.

Nous n'insisterons pas sur les problèmes suivants : *Mener une tangente qui fasse avec les axes rectangulaires des angles donnés, et mener une tangente qui fasse un angle donné avec le diamètre qui passe par le point de contact*, ce qui revient à dire : *Construire deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.* Les solutions de ces problèmes, comme celles des précédents, sont insuffisantes en théorie comme en pratique, parce qu'elles supposent les courbes complétement construites. Apollonius les rapporte sans doute parce qu'elles étaient connues avant lui, mais il n'en était peut-être pas très-satisfait lui-même.

Le troisième livre commence par le lemme suivant, que nous allons développer pour donner encore un exemple de calculs géométriques :

Soient M et N deux points d'une section conique, dont le centre est en O (le théorème serait vrai aussi pour une parabole). La tangente en M coupe ON en P, et la tangente en N coupe OM en Q ; enfin, soit R le point de rencontre de ces tangentes : je dis que les triangles MRQ, NRP sont équivalents (*fig.* 4).

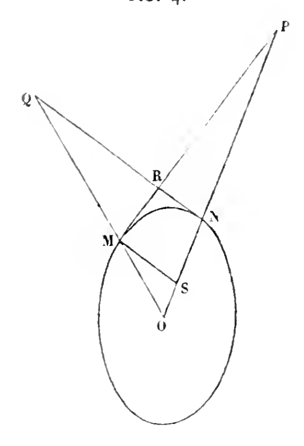
En effet, soit MS parallèle à QN ; le théorème de la troisième proportionnelle donne

$$\overline{ON}^2 = OP.OS,$$

ou bien

$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{OS}^2} = \frac{OP}{OS}.$$

Fig. 4.



Mais les triangles semblables donnent

$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{OS}^2} = \frac{OQN}{OMS},$$

et l'on a d'un autre côté

$$\frac{OP}{OS} = \frac{OMP}{OMS}.$$

Donc

$$OQN = OMP,$$

et, retranchant la partie commune OMRN, il reste

$$MRQ = NRP.$$

Nous ne suivrons pas l'auteur dans le développement des vingt-huit propositions suivantes, qui le conduisent d'une manière ingénieuse, mais pénible, au théorème que voici, en s'élevant de cas particuliers à des cas plus généraux.

D'un point O, pris n'importe où sur le plan d'une conique, menons, sous des directions arbitraires, deux sécantes, dont la première coupe

la courbe aux points A et B, la seconde aux points C et D. D'un autre point O', également quelconque, menons aussi deux sécantes, respectivement parallèles aux premières et qui coupent la courbe aux points A' et B', C' et D'; on aura

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{O'A'.O'B'}{O'C'.O'D'}.$$

L'énoncé de l'auteur n'est pas tout à fait aussi général; il suppose que les droites OAB, OCD sont respectivement parallèles à un système de diamètres conjugués. Malgré cette restriction, on voit que le *théorème des segments*, qui résume ainsi le commencement du troisième livre, pourrait être attribué à Apollonius aussi bien qu'à Newton, dont il porte le nom; il est vrai que Newton l'a énoncé d'une manière plus générale, et qu'il l'a même étendu aux courbes d'un degré supérieur.

Du reste, la restriction que nous avons signalée dans Apollonius est plutôt apparente que réelle, car elle ne s'étend point à la plupart des lemmes qu'il démontre.

Voici maintenant le résumé des dix propositions suivantes :

Toute sécante à une conique, passant par le point de concours de deux tangentes, est divisée harmoniquement par la corde de contact.

Ainsi, soit C le point de concours des tangentes, menons par ce point une droite qui coupe en D la corde de contact et qui rencontre la courbe aux deux points A et B; le point A étant situé entre C et D, nous aurons

$$CA.BD = CB.AD,$$

c'est-à-dire que le produit des deux parties extrêmes est équivalent au produit de la ligne totale par la ligne du milieu. Seulement l'auteur énonce ce théorème sous forme de proportion, et il écrit

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Le mot *harmonique*, qui est bien connu pour indiquer cette division d'une droite, n'est pas employé par Apollonius.

La proposition 41, qui ne paraît pas se rattacher à ce qui précède ni à ce qui suit, est énoncée ainsi par Apollonius :

Trois tangentes à la parabole se coupent dans la même proportion.

Mais cet énoncé est très-vague, et voici comment l'auteur le précise.

Soient A, B, C trois points d'une parabole, E le point de concours des tangentes extrêmes en A et en C, soit D le point où la tangente au point B, compris entre les deux autres, coupe AE, et F le point où elle coupe CE ; on a la relation

$$\frac{CF}{FE} = \frac{ED}{DA} = \frac{FB}{BD}.$$

Pour se rappeler ce théorème, on peut former les deux premiers rapports en prenant à la suite les uns des autres tous les segments des tangentes extrêmes, depuis le point C jusqu'au point A ; quant au troisième rapport, on revient au point F, voisin du point C de départ.

Voici les énoncés de quelques propositions qui viennent à la suite.

Si l'on mène par les extrémités d'un diamètre de l'ellipse des tangentes parallèles à son conjugué jusqu'à la rencontre d'une tangente quelconque, le produit des segments interceptés sur ces parallèles est égal au carré du demi-diamètre conjugué.

Même démonstration pour un diamètre transverse de l'hyperbole ; le produit indiqué sera égal au carré du demi-diamètre conjugué non transverse.

Une tangente à l'hyperbole détermine sur les asymptotes, à partir du centre, deux segments dont le produit est constant. (C'est une conséquence immédiate de l'équation asymptotique de la courbe et de la division de la tangente en deux parties égales au point de contact.)

Si l'on réunit deux à deux les points où deux tangentes à l'hyperbole rencontrent les asymptotes, ces lignes de jonction sont parallèles à la corde de contact.

Enfin commence à la 45ᵉ proposition la théorie des foyers que l'auteur appelle σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς, ce qui peut se traduire par *points de comparaison;* mais le mot grec n'est pas heureux, car il fait songer à la parabole dont il n'est ici nullement question. Au contraire, puisque l'auteur ne considère les foyers qu'en les comparant l'un à l'autre, il ne s'agit point du foyer de la parabole, qui est unique ;

en effet Apollonius n'en parle jamais et ne semble pas l'avoir connu.

La 45e proposition peut s'énoncer de la manière suivante :

Par les extrémités du grand axe d'une ellipse ou de l'axe transverse d'une hyperbole, élevez à cet axe deux perpendiculaires qui interceptent sur une tangente quelconque une certaine longueur. Sur cette longueur interceptée, prise comme diamètre, décrivez une demi-circonférence, qui coupe l'axe en deux points, ce seront les *points de comparaison* ou foyers.

Cependant les foyers sont d'abord définis de la manière suivante : prenez sur le grand axe de l'ellipse ou sur l'axe transverse de l'hyperbole un point tel que le produit de ses distances aux extrémités de cet axe soit *le quart de la figure* $\left(\text{c'est-à-dire } b^2, \text{ car la figure est le produit du côté droit par l'axe, ce qui fait } \frac{2b^2}{a} \cdot 2a = 4b^2\right)$. Ce point et son symétrique seront les foyers.

On démontre que, si l'on joint à l'un des foyers les extrémités de la distance interceptée sur la tangente quelconque, on formera ainsi un angle droit dont ce foyer sera le sommet.

La ligne qui joint l'un des foyers à l'une des extrémités dont nous venons de parler et celle qui joint l'autre foyer à l'autre extrémité portent collectivement, chez Apollonius, le nom de *lignes conjointes :* on voit donc qu'il y en a deux couples pour chaque tangente.

Cela posé, la proposition 46, dont l'énoncé est assez obscur, consiste en ce que, si l'on considère un couple de lignes conjointes, l'angle que fait l'une de ces droites avec la tangente en question est égal à l'angle que fait l'autre droite avec l'axe focal. Cela se voit parce que ces angles sont inscrits dans un même segment de la demi-circonférence dont nous avons parlé.

Viennent ensuite les théorèmes suivants :

Le point de concours de chaque système de lignes conjointes est sur la normale, c'est-à-dire sur la perpendiculaire élevée à la tangente que nous considérions par son point de contact.

Les rayons vecteurs de ce point de contact font des angles égaux avec la normale pour l'ellipse et avec la tangente pour l'hyperbole. (C'est aujourd'hui le théorème fondamental de la théorie des tangentes.)

De l'un des foyers abaissez une perpendiculaire sur une tangente, joignez le pied de la perpendiculaire aux sommets de l'axe focal, ces lignes de jonction font un angle droit dont le sommet est le pied de la perpendiculaire.

Menez par le centre une parallèle à l'un des rayons vecteurs jusqu'à la tangente, cette distance sera égale à la moitié de l'axe focal.

Ces deux dernières propositions reviennent à dire que le lieu géométrique des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes est un cercle qui a pour diamètre l'axe focal.

L'axe focal est égal à la différence des rayons vecteurs dans l'hyperbole et à leur somme dans l'ellipse.

Ici se termine, à la proposition 52, la théorie des foyers par cette propriété fondamentale qui leur sert aujourd'hui de définition. On voit que la principale imperfection de cette théorie consiste en ce qu'il n'est point question des directrices.

Voici enfin les propositions qui terminent le troisieme livre :

Des extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipse ou d'un diamètre transverse de l'hyperbole, élevez des tangentes à la courbe et joignez ces mêmes extrémités à un point quelconque de la courbe; les lignes de jonction prolongées détermineront sur les tangentes opposées, à partir de chaque extrémité du diamètre, des segments dont le produit sera égal au carré du diametre conjugué avec celui que l'on considère.

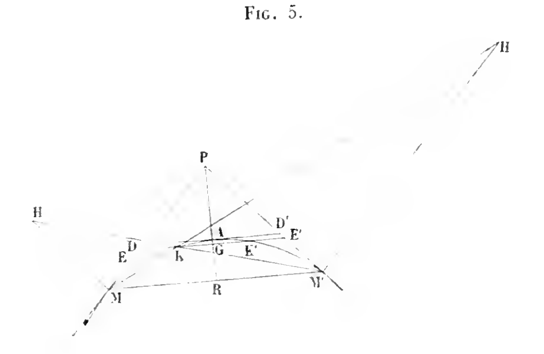
La proposition 42 de ce livre montre que ce rectangle est quadruple de celui des droites qu'intercepte, sur les mêmes tangentes, la tangente au point quelconque que l'on considère.

Les trois dernières propositions du troisième livre se résument dans un theorème dont nous allons encore citer l'énoncé et même la démonstration, pour montrer jusqu'où peut aller la complication des calculs géométriques de l'auteur.

Soient M et M′ deux points quelconques d'une portion continue de section conique (*fig.* 5), et menons les tangentes MP, M′P qui se coupent en P; joignons le point P au milieu R de la corde MM′, et soit A le point où PR rencontre la courbe, A étant entre P et R. Des mêmes points M et M′ menons MH parallèle à M′P et M′H′ parallèle à MP; enfin, soit K un point pris sur la même branche de la conique, et joi-

gnons MK qui coupe M′H′ en H′, ainsi que M′K qui coupe MH en H,

Fig. 5.



nous aurons la relation

$$\frac{\mathrm{MH}.\mathrm{M'H'}}{\overline{\mathrm{MM'}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AR}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2} \cdot \frac{\mathrm{MP}.\mathrm{PM'}}{\mathrm{RM}.\mathrm{RM'}},$$

seulement il faut observer que RM = RM′, ce qui réduit la formule à celle-ci :

$$\mathrm{MH}.\mathrm{M'H'} = \frac{\overline{\mathrm{AR}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}.4.\mathrm{PM}.\mathrm{PM'}.$$

formule indépendante de la position du point K.

A ce sujet, nous ferons remarquer une notation qui pourrait embarrasser dans la lecture des anciens géomètres; quand on parle du rectangle MPM′, il faut imaginer que la lettre du milieu est redoublée, ce qui fait le rectangle MP.PM′, même quand les trois points ne sont pas sur la même droite.

Voici maintenant comment Apollonius démontre le théorème précédent :

Des points A et K menons des parallèles à MM′; on sait que la parallèle en A est tangente à la courbe et coupe les tangentes données en deux points D et D′, tels que AD = AD′.

La parallèle menée par le point K coupera aussi ces deux tangentes aux points E, E′, et rencontrera encore la courbe en un autre point K′; on sait que PR passe par le milieu de KK′ et de EE′, ce qui fait que EK′ = KE′.

Cela posé, le théorème des segments, démontré au commencement de ce livre, nous donne

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DM}^2} = \frac{EK.EK'}{\overline{EM}^2},$$

puisque chaque point de contact est un point double, et que les sécantes et tangentes parallèles peuvent partir des points D et E; mais, d'après ce que l'on vient de voir, on peut écrire

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DM}^2} = \frac{KE.KE'}{\overline{EM}^2}.$$

Ensuite les lignes proportionnelles donnent

$$\frac{E'M'}{EM} = \frac{D'M'}{DM},$$

ou bien

$$\frac{E'M'.EM}{\overline{EM}^2} = \frac{D'M'.DM}{\overline{DM}^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\overline{DA}^2}{DM.D'M'} = \frac{KE.KE'}{EM'.EM'}.$$

Mais aussi

$$\frac{KE}{EM} = \frac{MM'}{M'H'} \quad \text{et} \quad \frac{KE'}{E'M'} = \frac{MM'}{MH},$$

ce qui donne

$$\frac{DM.D'M'}{\overline{DA}^2} = \frac{MH.M'H}{\overline{MM'}^2}.$$

Observons maintenant que

$$\overline{DA}^2 = DA.D'A,$$

et introduisons en haut et en bas le facteur PD.PD', nous aurons

$$\frac{MH.M'H'}{\overline{MM'}^2} = \frac{DM.D'M'}{PD.PD'} \cdot \frac{PD.PD'}{DA.D'A};$$

puis nous remarquerons que

$$\frac{DM}{DP} = \frac{AR}{AP} = \frac{D'M'}{D'P},$$

et le premier facteur du second membre devient $\frac{\overline{AR}^2}{\overline{AP}^2}$.

Ensuite

$$\frac{PD}{DA} = \frac{PM}{MR} \quad \text{et} \quad \frac{PD'}{D'A} = \frac{PM'}{M'R},$$

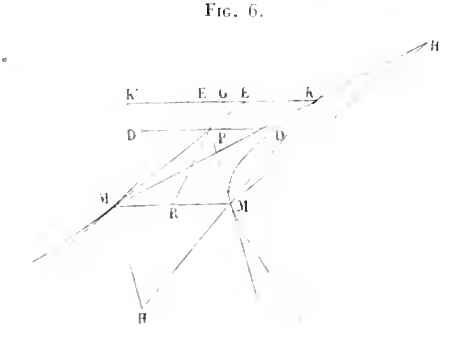
de sorte que le second facteur devient $\frac{PM.PM'}{MR.M'R}$, ce qui démontre la proposition. Le résultat final peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{MH}{MP} \cdot \frac{M'H'}{M'P} = 4 \cdot \frac{\overline{AR}^2}{\overline{AP}^2}.$$

Nous avons supposé que le point K était sur la même branche que les points M et M'; c'est ce qui a lieu nécessairement pour une ellipse et une parabole; il peut aussi en être de même pour une hyperbole, mais cette dernière courbe présente deux autres circonstances remarquables. On peut supposer que, les points M et M' étant encore sur la meme section, le point K soit sur la section opposée; dans ce cas, il faut prendre le point A, où PR rencontre la courbe, non sur la section des points M et M', mais sur celle du point K. Ainsi ce point A ne sera pas, comme précédemment, situé entre P et R, mais au contraire le point P se trouvera entre A et R; du reste, l'énoncé et la démonstration seront les mêmes.

Mais si les deux premiers points M et M' ne sont plus sur la même

Fig. 6.



section, le théorème subit une modification importante, parce que, le diamètre PR n'étant plus transverse, le point A devient imaginaire (*fig.* 6).

Dans cette circonstance nous conserverons, autant que possible, les notations précédentes; seulement les lettres D et D' indiqueront les points où la parallèle, menée par le point P à MM', rencontre chacune des sections. D'après cela, le théorème des segments donne

$$\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{EK.EK'}{\overline{EM}^2},$$

puisque PD = PD'; ou bien

$$\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{EK.E'K}{\overline{EM}^2},$$

car E'K = EK', puisque le diamètre PR passe par le milieu de EE' et de KK'. De plus, les lignes proportionnelles donnent

$$\frac{PM'}{PM} = \frac{E'M'}{EM},$$

ou identiquement

$$\frac{PM.PM'}{\overline{PM}^2} = \frac{EM.E'M'}{\overline{EM}^2}:$$

d'où l'on tire

$$\frac{\overline{PD}^2}{PM.PM'} = \frac{EK}{EM}.\frac{E'K}{E'M'}.$$

Mais les triangles semblables donnent

$$\frac{EK}{EM} = \frac{MM'}{M'H'} \quad \text{et} \quad \frac{E'K}{E'M'} = \frac{MM'}{MH};$$

d'où enfin

$$\frac{\overline{PD}^2}{PM.PM'} = \frac{\overline{MM'}^2}{MH.M'H'};$$

résultat encore indépendant de la position du point K sur l'une ou l'autre section.

Le lecteur pourrait conserver quelques doutes sur les démonstra-

tions de ces théorèmes dans Apollonius, parce qu'elles sont fondées sur la propriété des segments, qui devraient être, d'après la restriction signalée chez notre auteur, au commencement du troisième livre, parallèles à un système de diamètres conjugués, ce qui n'a point lieu ici. Mais nous ferons observer que le théorème 16, relatif à une sécante et à deux tangentes et sur lequel sont basées les propositions que nous venons d'établir, est démontré, ainsi que le remarque le commentateur Eutocius, d'une manière indépendante de la restriction indiquée.

Si nous nous sommes étendus sur ces derniers théorèmes, c'est que nous les croyons peu connus, et surtout parce que les démonstrations en sont peut-être moins compliquées avec les méthodes anciennes qu'avec les calculs modernes. Par une raison contraire, nous abrégerons l'analyse des trois livres suivants.

Sauf quelques théorèmes, tels que ceux des segments et de la division harmonique, dont les démonstrations et même les énoncés sont peut-être dus à Apollonius, il n'a été question jusqu'ici que de la partie élémentaire de la science, et beaucoup des propositions que nous avons citées sur les diamètres, les tangentes, les asymptotes, les foyers, étaient sans doute connues avant notre auteur. Cette variété de matière fait qu'il est difficile de préciser le sujet de chacun des trois premiers livres; mais ceux que nous examinerons dorénavant peuvent recevoir chacun un titre particulier : d'ailleurs la part d'invention que l'on peut attribuer à Apollonius y devient plus considérable.

Le quatrième livre roule sur les intersections et les contacts des sections coniques entre elles. Ici Apollonius ne se vante pas d'avoir découvert la plupart des théorèmes, mais seulement de les avoir beaucoup mieux démontrés que tous ses devanciers. En effet, on comprend que, dans une recherche de cette nature, une étude intelligente des figures avait dû faire, depuis longtemps, deviner une foule d'énoncés, mais on concevra aussi toute la difficulté que l'on éprouvait alors à les démontrer rigoureusement. D'abord les anciens ne connaissaient les équations des sections coniques que dans le cas où les coordonnées étaient parallèles à un système de diamètres conjugués; encore fallait-il que l'origine fût le centre ou l'extrémité d'un diamètre : or, quand on compare deux coniques, il faut que les coordonnées aient une po-

sition quelconque relativement à l'une d'elles. Mais ce qui manquait surtout aux anciens pour cette étude, c'était l'élimination et la théorie des équations. Les methodes d'Apollonius, fort ingénieuses, mais assez pénibles, ne présentent donc maintenant que peu d'intérêt, même au point de vue historique; nous nous contenterons de dire que toutes les démonstrations sont faites par la réduction à l'absurde, et fondées sur le principe de la division harmonique. Aussi les vingt-trois premières propositions ne sont que des corollaires du théorème relatif à la division harmonique des sécantes; nous distinguerons le lemme suivant (prop. 6 et 7) :

Soient OM, ON les asymptotes d'une hyperbole, et D le point où concourront les tangentes aux points A et B de la courbe; joignons AB et menons du point D à l'une des asymptotes une parallèle qui coupe AB en E : je dis que le milieu C de DE est sur l'hyperbole.

Parmi les théorèmes qui terminent ce livre, voici les plus remarquables :

Deux coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points.

Si elles ont un contact, elles ne peuvent plus se couper qu'en deux points.

Si elles ont deux contacts, elles ne peuvent plus se rencontrer.

Deux paraboles ne peuvent avoir qu'un seul contact.

Au point de contact d'une hyperbole et d'une parabole si la parabole est extérieure, il ne peut y avoir un second contact.

Au point de contact d'une ellipse et d'une parabole si la parabole est intérieure, il ne peut y avoir un second contact.

Nous terminerons en rappelant que l'intersection des coniques avait pour les anciens une grande importance, parce que cette considération leur permettait de résoudre certains problèmes, tels que celui des deux moyennes proportionnelles et celui de la duplication du cube, conséquence du premier. On conçoit, en effet, que les questions qui conduisent à des expressions du troisième et du quatrième degré, ne pouvant se résoudre par la ligne droite et le cercle, exigeaient l'emploi des sections coniques; c'était, en quelque sorte, la Géométrie appliquée à l'Algèbre.

Nous avons dit que les quatre premiers livres d'Apollonius étaient

les seuls dont on possédât le texte grec, et qu'il y avait seulement deux siècles que Borelli avait découvert une traduction arabe des sept premiers livres. On sait, en effet, qu'il ne faut pas juger les Arabes par l'incendie vrai ou faux de la Bibliothèque d'Alexandrie, et qu'après les premiers excès de leur enthousiasme religieux et guerrier, on vit se développer chez eux le goût de la philosophie et des sciences. Ils s'attachèrent surtout à traduire et à commenter les ouvrages de l'antiquité grecque, à laquelle les rattachait un certain instinct de subtilité : aussi est-ce par eux que l'Occident connut pour la première fois la plupart des écrits d'Aristote. Mais les traductions arabes d'Apollonius ont pour nous d'autant plus d'importance, que l'on n'a jamais retrouvé le texte original des quatre derniers livres, et qu'il reste peu d'espoir d'une pareille découverte

Borelli ayant reconnu au commencement du manuscrit dont nous avons parlé les figures des quatre premiers livres d'Apollonius, voulut faire traduire la suite ; il se procura un interprète qui n'entendait pas mieux les mathématiques que lui-même ne savait l'arabe, mais tous deux réussirent à faire en peu de temps une traduction moins imparfaite qu'on n'aurait pu le croire d'après des conditions aussi défavorables, et même, selon les explications qu'ils donnent, les défauts qu'on peut y trouver tiennent surtout à l'ancien commentateur musulman.

Ce qui semble le prouver, c'est qu'on a retrouvé plus tard un autre manuscrit arabe, préférable sous bien des rapports, et qui a servi à faire l'édition d'Oxford (1710), due à Halley, si célèbre par la comète qui porte son nom. Cette belle édition, que nous avons sous les yeux, contient, pour les quatre premiers livres, le texte grec d'Apollonius, rétabli avec sagacité dans plusieurs passages, et en regard, une traduction latine, le tout accompagné des commentaires d'Eutocius. On trouve le latin seul pour les trois livres suivants, traduits de l'arabe, et même pour le huitième, ingénieusement restitué par Halley, qui a publié en outre les lemmes de Pappus, relatifs aux différents livres d'Apollonius. Enfin, le volume se termine par deux opuscules de Serenus sur la section du cylindre et sur les sections rectilignes que l'on obtient en coupant un cône par un plan qui passe par son sommet.

Le cinquième livre d'Apollonius traite des lignes les plus longues et les plus courtes menées de certains points aux sections coniques,

c'est-à-dire des normales à ces courbes. On voit donc que le sujet de ce livre touche à la théorie des rayons de courbure et des développées, et qu'ici la géométrie doit lutter, non-seulement avec l'algèbre ordinaire, mais encore avec l'analyse infinitésimale : cependant l'auteur n'invoque aucun théorème en dehors des éléments, comme celui des harmoniques du troisième livre, qui servait de base aux démonstrations du quatrième.

Quant aux méthodes employées dans le cinquième livre, voici un exemple qui peut en donner l'idée, quoiqu'il soit trop simple pour figurer dans Apollonius. Sur le plan d'un cercle prenons un point quelconque, et cherchons la plus petite et la plus grande ligne que l'on puisse mener de ce point à la circonférence; on voit sans peine que ces lignes seront normales à la courbe. Mais, si la question précédente est d'une facilité puérile, il n'en est pas de même pour les démonstrations relatives aux sections coniques, dont quelques-unes sont, au contraire, d'une extrême complication.

Dans les quinze premières propositions, il s'agit des lignes maxima ou minima menées à la conique par un point de l'axe focal; l'auteur considère en particulier le centre de courbure de rayon minimum, et fait remarquer que la distance de ce point au sommet correspondant est la moitié du côté droit.

Remarquons encore la huitième proposition, dans laquelle on démontre que la sous-normale de la parabole est constante et égale à la moitié du côté droit.

Viennent ensuite divers théorèmes relatifs à l'ellipse, et où l'on considère les droites maxima et minima menées à la courbe par un point du petit axe; on obtient ainsi le rayon de courbure maximum. Cependant l'auteur commence à considérer des points situés en dehors des axes, dans la proposition 21, dont voici l'énoncé :

D'un point quelconque N du petit axe, menons à la courbe la ligne maximum NM; sur le prolongement de cette ligne, au delà du petit axe, prenons un point quelconque P, la distance maximum de ce point à la courbe sera PM. Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que, dans les triangles, aux plus grands angles sont opposés les plus grands côtés.

Les propositions suivantes, de 27 à 34, servent à établir que, dans

les trois coniques, les lignes maxima et minima sont normales à la courbe, ce qui permet de les trouver facilement pour un point de la courbe par la construction de la tangente.

Après quelques lemmes sur les différentes portions du plan de la courbe où se coupent les droites maxima et minima, l'auteur aborde le problème suivant :

D'un point donné sur le plan de la conique, mener une normale à cette courbe.

On comprend que les démonstrations de l'auteur deviennent ici excessivement pénibles. Quant aux constructions, elles se font en coupant la conique par une hyperbole convenablement choisie. Apollonius fait observer que le problème est toujours possible si le point donné est intérieur à la courbe, mais qu'il ne l'est pas toujours si ce point est extérieur.

La proposition 68 et les trois suivantes reviennent au théorème dont voici l'énoncé :

De deux tangentes à une conique, partant d'un même point extérieur, la plus petite, depuis ce point jusqu'au point correspondant de contact, est celle qui se rapproche le plus d'un sommet de l'axe focal.

Enfin, le cinquième livre se termine par quelques considérations sur la manière dont croissent ou décroissent les lignes menées à la section par un point où concourent des normales, à mesure que ces lignes s'approchent ou s'éloignent de l'axe focal.

Ce livre est donc un des plus beaux titres de gloire d'Apollonius, surtout si l'on considère les difficultés que présentait alors le problème de la normale menée à une conique par un point quelconque. Quant à la théorie des développées, il semble l'avoir entrevue; mais on ne pourrait, sans exagération évidente, soutenir qu'elle se trouve tout entière dans l'ouvrage que nous analysons.

Nous n'avons pas à nous arrêter longtemps sur le sixième livre, qui traite de l'égalité et de la similitude des coniques, et qui ne diffère pas essentiellement de la manière dont on présente encore aujourd'hui ces questions; d'ailleurs Apollonius dit qu'il n'a fait qu'étendre et éclaircir les travaux de ses prédécesseurs.

Il n'est question, dans ce livre, que des sections obtenues dans le

cône droit de la Géométrie élémentaire : d'après cela, l'auteur définit *cônes semblables,* ceux dont les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases; puisqu'ils sont droits, il est clair que l'angle du sommet est le même.

Voici maintenant la définition qu'il donne des coniques semblables : Si nous comparons deux ellipses, par exemple, divisons leurs grands axes dans un même nombre, d'ailleurs quelconque, de parties égales, et par ces points de division élevons des perpendiculaires à cet axe : les deux courbes seront semblables si deux abscisses correspondant à un même nombre de divisions de l'axe donnent des ordonnées proportionnelles à ces abscisses. La même définition s'applique aux hyperboles semblables ; seulement ici il faudra porter les divisions de l'axe focal au delà de chaque sommet, afin d'avoir des points de la courbe.

Dans la comparaison de deux paraboles, les divisions de l'axe focal de chacune d'elles, prises à partir du sommet, sont proportionnelles aux longueurs de leurs côtés droits. D'après cela (prop. 11), toutes les paraboles sont semblables.

L'auteur considère ensuite diverses conditions d'égalité et de similitude entre des coniques ou des segments de coniques. Voici la définition de la similitude des segments :

Deux segments sont semblables quand leurs bases font des angles égaux avec les diamètres qui passent par les milieux de ces bases, et quand, de plus, si l'on divise en un même nombre de parties égales la portion de diamètre comprise dans chacun d'eux entre le milieu de la base et le point où ce diamètre se termine sur le segment, le rapport de chaque ordonnée (c'est-à-dire de chaque parallèle menée à la base), avec l'abscisse correspondante, est égal au rapport analogue dans l'autre segment, pour le même nombre de divisions.

Les théorèmes 26 et 27 établissent que deux sections parallèles sur un même cône sont semblables.

Viennent ensuite divers problèmes pour placer une conique donnée sur un cône droit donné; mais l'auteur fait observer que la solution ne sera possible pour l'hyperbole que si le rapport du carré de l'axe du cône au carré du rayon de sa base ne dépasse pas le rapport de l'axe transverse de l'hyperbole avec son côté droit. Ces solutions complètent les questions analogues que nous avons vues à la fin du pre-

mier livre, et chaque énoncé est double, suivant que c'est la surface ou la courbe qui est donnée de *position;* par exemple :

Sur un cône droit donné trouver une section égale à une ellipse donnée. (Prop. 30.)

Trouver un cône droit semblable à un cône donné, et sur lequel soit tracée une ellipse donnée. (Prop. 33 et dernière.)

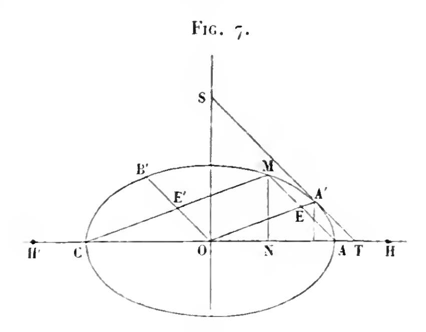
Mais, en réalité, ces deux problèmes n'en font qu'un, car il s'agit toujours, connaissant les éléments de la conique et l'angle du cône dans la section principale, de trouver dans cette section la portion d'apothème interceptée par le diamètre transverse jusqu'au sommet du cône et l'angle de ce diamètre avec cette apothème.

Le septième livre complète la théorie des diamètres conjugués, et contient surtout les fameuses propositions sur les carrés et les produits de ces diamètres, théorèmes dont la découverte est due à Apollonius. Les démonstrations qu'il en donne méritent d'autant plus d'attention, qu'elles ressemblent moins à toutes celles que l'on trouve dans les ouvrages modernes; mais la première, qui est relative à la somme ou à la différence des carrés des diamètres, est tres-compliquée. Nous allons montrer d'abord dans quel esprit elle est conçue, et nous chercherons ensuite à la préciser davantage; mais nous devons prévenir que l'auteur s'attache toujours à appliquer les mêmes raisonnements à l'ellipse et à l'hyperbole, malgré les difficultés que présentent pour cette dernière courbe les diamètres non transverses. Ces difficultés disparaissent si l'on considère, comme dans le deuxième livre, les sections opposées *conjuguées* qui ont pour diamètres transverses les diamètres non transverses de l'hyperbole que l'on considère.

Cela posé, les démonstrations relatives à la somme ou à la différence des carrés des diamètres sont fondées sur ce que ces diamètres conjugués sont parallèles aux droites que nous appelons aujourd'hui *cordes supplémentaires,* c'est-à-dire aux lignes que l'on obtient en joignant un point quelconque de la courbe aux extrémités de l'axe focal ou même d'un diamètre transverse quelconque. Soient M ce point (*fig.* 7) et CA ce diamètre ; du centre O de la courbe menons à CM une parallèle qui coupe MA en E : il est clair que ce point E est le milieu de MA, puisque les triangles CMA, OEA sont semblables, et que OA est la moitié

de CA. Par la même raison, soit E′ le point où la parallele menée du

Fig. 7.



centre à MA coupe CM, on voit que E′ sera le milieu de CM; donc les diamètres OE, OE′ sont conjugués, puisque chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre, et ils sont respectivement parallèles, comme nous l'avions indiqué, à deux cordes supplémentaires.

Rien ne serait plus simple, au moyen de l'analyse moderne, que d'appliquer ce principe au théorème en question, mais nous allons voir que notre auteur n'y parvient que d'une manière assez pénible. Il semble même que le traducteur arabe, sur le manuscrit duquel a travaillé Borelli, n'ait pas toujours bien compris le livre que nous étudions; l'autre traducteur dont nous avons parlé montre plus d'intelligence et surtout plus de clarté. Du reste, on remarque entre eux des différences assez graves dans les définitions elles-mêmes, ce qui fait voir que les Arabes prenaient de grandes libertés avec les textes qu'ils traduisaient; d'ailleurs nous suivrons uniquement l'édition de Halley.

Voici la nouvelle définition que l'on est conduit à introduire : Soit d la valeur du côté droit, en sorte que $d = \frac{2b^2}{a}$, et cherchons sur l'axe focal $CA = 2a$, du côté du point A, un autre point H tel, que l'on ait

$$\frac{CH}{AH} = \frac{CA}{d};$$

la ligne AH s'appelle *homologue*, et l'on trouve facilement

$$AH = \frac{2ab^2}{c^2},$$

la quantité c étant toujours la distance du centre à l'un des foyers; on trouvera aussi

$$CH = \frac{2a^3}{c^2}.$$

Dans l'ellipse, la ligne *homologue* AH est portée au delà du demi-axe OA; dans l'hyperbole, au contraire, le point H est entre O et A.

La symétrie des deux courbes montre qu'il existe de l'autre côté de l'axe un point H' analogue au point H; ainsi

$$CH' = AH \quad \text{et} \quad CH = AH'.$$

Le premier usage que fait Apollonius de ces lignes *homologues* consiste à présenter sous une nouvelle forme les équations des courbes, en établissant une relation entre l'abscisse d'un point quelconque et l'une des cordes supplémentaires qui aboutissent à l'axe. Soit donc M un point quelconque de l'ellipse, par exemple, et soit N le pied de l'ordonnée MN, on trouve (prop. 3)

$$\frac{CA}{CH} = \frac{\overline{AM}^2}{NA.NH},$$

ce qui revient à

$$\frac{\overline{AM}^2}{NA.NH} = \frac{c^2}{a^2}:$$

on aura de même

$$\frac{\overline{CM}^2}{NC.NH'} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Même théoreme pour l'hyperbole.

Cette forme d'équation permettra d'exprimer les carrés des diametres conjugués en fonction des longueurs NH et NH'.

Pour y parvenir, soit OA' le demi-diamètre parallèle à CM, soient K le pied de l'ordonnée A'K du point A', et T le point où la tangente en A' rencontre l'axe; je dis que l'on aura

$$\frac{\overline{A'T}^2}{\overline{OB'}^2} = \frac{KT}{OK},$$

en indiquant par $\overline{OB'}^2$ le carré du demi-diamètre conjugué avec OA'.

En effet, on a vu (livre I, prop. 50 et 51) que si l'on appelle S le point où la tangente A′T rencontre l'axe OB perpendiculaire à OA, on obtient

$$\overline{OB'}^2 = A'S.A'T.$$

Mais il serait facile de voir, en menant par le point A′ une ligne égale et parallèle à OK, que l'on trouverait par des triangles semblables

$$\frac{A'S}{A'T} = \frac{OK}{KT}.$$

Transportant donc dans la valeur de $\overline{OB'}^2$ l'expression

$$A'S = A'T \cdot \frac{OK}{KT},$$

il reste

$$\overline{OB'}^2 = \overline{A'T}^2 \cdot \frac{OK}{KT},$$

ce qui revient à la relation indiquée.

Ensuite, les triangles semblables OA′T, CMA détermineront aussi des triangles rectangles semblables; par conséquent

$$\frac{OK}{KT} = \frac{CN}{NA},$$

et il reste

$$\overline{OB'}^2 = \overline{A'T}^2 \cdot \frac{CN}{NA}.$$

Enfin, les mêmes triangles semblables donneront encore

$$\frac{A'T}{AM} = \frac{OT}{CA} = \frac{a}{2OK},$$

puisque

$$OT = \frac{a^2}{OK};$$

mais aussi

$$\frac{A'T}{AM} = \frac{OA'}{CM} = \frac{OK}{CN};$$

multipliant donc ces deux expressions de $\frac{\text{A}'\text{T}}{\text{AM}}$, on trouve

$$\frac{\overline{\text{A}'\text{T}}^2}{\overline{\text{AM}}^2} = \frac{a}{2\text{CN}},$$

ce qui devient, à cause de la valeur de $\overline{\text{AM}}^2$, connue par la proposition 3,

$$\overline{\text{A}'\text{T}}^2 = \frac{c^2.\text{NA}.\text{NH}}{2a.\text{CN}},$$

et la dernière expression de $\overline{\text{OB}'}^2$ se réduit à

$$\overline{\text{OB}'}^2 = \frac{c^2.\text{NH}}{2a}.$$

On aura de même

$$\overline{\text{OA}'}^2 = \frac{c^2.\text{NH}'}{2a},$$

et comme

$$\text{NH} + \text{NH}' = 2\text{OH} = \frac{2a(a^2+b^2)}{c^2},$$

il reste (prop. 12), pour l'ellipse,

$$\overline{\text{OA}'}^2 + \overline{\text{OB}'}^2 = a^2 + b^2.$$

L'observation que nous avons faite sur les sections opposées conjuguées montre que nous aurons pour l'hyperbole, grâce à de légères modifications,

$$\overline{\text{OA}'}^2 - \overline{\text{OB}'}^2 = a^2 - b^2 \text{ (prop. 13)}.$$

Nous avons un peu simplifié cette démonstration, afin de mieux faire saisir la méthode de l'auteur, ou peut-être celle du commentateur, car il faut toujours se défier des interprètes arabes; mais on comprend qu'une pareille série de déductions, si ingénieuse qu'elle soit, ait disparu de l'enseignement.

Les expressions

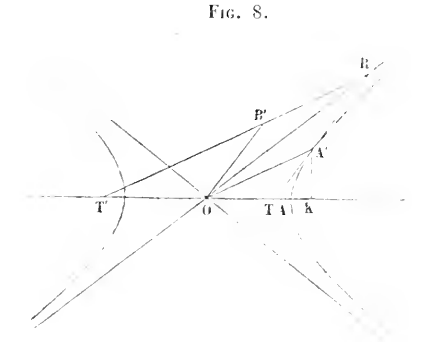
$$a'^2 = \frac{c^2\ \text{NH}'}{2a} \quad \text{et} \quad b'^2 = \frac{c^2.\text{NH}}{2a}$$

conduisent à comparer deux diamètres conjugués relativement à leur produit, à leur rapport, à leur somme ou à leur différence, soit avec les axes, soit entre eux, suivant qu'ils s'écartent plus ou moins de ces axes ; on voit, par exemple, que les diamètres égaux de l'ellipse sont ceux pour lesquels $a' + b'$ est maximum. Mais nous n'insisterons pas sur ces propositions, qui ne sont pas nécessaires pour arriver au théorème sur le parallélogramme des diamètres conjugués.

La démonstration de ce théorème (proposition 31) est la même pour l'ellipse et l'hyperbole, mais nous allons l'exposer sur cette dernière courbe (*fig.* 8).

Soient OA′ le demi-diamètre transverse, et OB′ son conjugué non

Fig. 8.



transverse; soit R le sommet du parallélogramme construit sur ces demi-diamètres; on sait que ce point R sera sur une asymptote, que A′R sera tangent à l'hyperbole donnée, et B′R à l'une des sections opposées conjuguées. Enfin, représentons par p la surface du triangle ROA′, et par t celle du triangle OA′T, en indiquant par T le point où A′R coupe l'axe focal, nous aurons évidemment

$$\frac{t}{p} = \frac{A'T}{OB'},$$

puisque

$$A'R = OB',$$

ce qui donne

$$\frac{t^2}{p^2} = \frac{KT}{OK},$$

d'après ce qu'on a vu pages 184 et 185, K étant le pied de l'ordonnée $A'K = y$.

Maintenant, soit l'abscisse $OK = x$, on sait que

$$OT = \frac{a^2}{x},$$

ce qui donne

$$KT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

et comme

$$x^2 - a^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}.$$

il vient

$$\frac{t^2}{p^2} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2},$$

ou bien

$$\frac{t}{p} = \frac{ay}{bx},$$

expression qui peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{t}{p} = \frac{y \cdot \frac{a^2}{x}}{ab}.$$

Or, le numérateur $y \cdot \frac{a^2}{x}$ est égal à $2t$, puisqu'il mesure deux fois la surface du triangle OA′T; de même aussi, en comparant les dénominateurs, on trouve

$$ab = 2p,$$

ce qui démontre la proposition, puisque le triangle $p =$ ROA′ est la moitié du parallélogramme OA′B′R.

On voit que cette démonstration est aussi simple qu'aucune de celles qui aient été proposées à ce sujet, et qu'elle a surtout l'avantage de s'appliquer également à l'ellipse et à l'hyperbole; cependant elle est assez pénible dans l'auteur, parce qu'elle est compliquée mal à propos d'une autre proposition que nous allons exposer aussi, quoiqu'elle ne soit qu'un objet de curiosité.

Soit t' la surface du triangle B′OT′, en indiquant par T′ le point où

le côté B′R du parallélogramme rencontre l'axe focal, je dis que

$$tt' = p^2.$$

En effet, on a déjà trouvé

$$\frac{t}{p} = \frac{\text{A}'\text{T}}{\text{OB}'},$$

mais, à cause des triangles semblables OA′T, T′B′O, on a aussi

$$\frac{t}{p} = \frac{\text{OT}}{\text{OT}'}.$$

De même

$$\frac{t'}{p} = \frac{\text{B}'\text{T}'}{\text{OA}'} = \frac{\text{OT}'}{\text{OT}},$$

donc

$$\frac{tt'}{p^2} = 1.$$

On voit que cette proposition ne sert à rien pour arriver au théorème précédent; c'est peut-être une note qui sera passée dans le texte par la faute des copistes.

Revenons maintenant à la parabole que nous avons laissée de côté; il suffira de dire que, dans la proposition 5, l'auteur démontre facilement que le côté droit relatif à des diamètres conjugués quelconques est égal au côté droit relatif aux axes rectangulaires, plus quatre fois l'abscisse de la nouvelle origine, cette abscisse étant prise, comme à l'ordinaire, sur l'axe focal. Seulement, comme Apollonius ne connaît pas le foyer de la parabole, il ne peut, comme on le fait maintenant, exprimer cette quantité en fonction du rayon vecteur.

Enfin, le septième livre se termine par une vingtaine de propositions peu intéressantes et que nous nous dispenserons d'analyser, relatives à la comparaison des diverses *figures* que donnent les différents systemes de diamètres conjugués. Nous avons vu, dans l'analyse du premier livre, que l'on appelait *figure* le parallélogramme construit sur un diamètre transverse et sur son côté droit correspondant; mais nous rappellerons ici que l'angle de ce parallélogramme doit toujours être celui du système de diamètres que l'on considère, quoique l'on emploie quelquefois le mot de rectangle au lieu de celui de parallélogramme.

Ces théorèmes sur les *figures* ne sont pas restés dans la science, parce que les problèmes pour la solution desquels ils pourraient être utiles se résolvent aussi bien au moyen des propositions établies sur les carrés et les parallélogrammes des diametres conjugués.

Nous ne pouvons parler du huitième livre que d'après la restitution qui en a été entreprise par Halley; mais quoiqu'une pareille tentative soit toujours incertaine et téméraire, on peut la justifier, parce que l'on connaît le sujet sur lequel roulait ce livre perdu. Le peu de mots qu'Apollonius y consacre dans sa préface générale, adressée à Eudème, ne suffiraient pas à eux seuls, car il y est dit seulement que ce livre contient des problèmes déterminés sur les coniques; mais une lettre d'envoi, adressée à Attale, et qui précède le septième livre, nous apprend que les théorèmes de ce livre servent à résoudre les problèmes du huitième. De plus Halley observe que Pappus, qui fait d'ordinaire une série de lemmes pour chacun des livres d'Apollonius, réunit ceux qui regardent les deux derniers. Il est donc hors de doute que le huitieme livre contenait des problèmes résolus par les propriétés des diamètres conjugués et de leurs *figures*.

Nous avons vu dans le second livre plusieurs questions de cette nature résolues d'une manière imparfaite, parce qu'il fallait admettre que la conique fût construite d'avance. Halley s'est conformé aux intentions de l'auteur en évitant cette nécessité, mais ses solutions ne peuvent avoir, au point de vue historique, le même intérêt que celles d'Apollonius, qui pourtant n'en différaient peut-être pas beaucoup. Nous dirons seulement que, dans les problèmes où il faut déterminer, d'après certaines conditions, un système de diamètres conjugués dans une conique dont les axes sont donnés, il commence par chercher sur l'axe des ordonnées un point servant de centre à un cercle de rayon tel, qu'il détermine sur l'axe focal les pieds des ordonnées des points de la courbe, d'où l'on peut mener des cordes supplémentaires parallèles aux diamètres demandés. Connaissant ainsi les abscisses égales et opposées de ces points symétriques, on obtiendra l'ordonnée correspondante au moyen de l'équation de la courbe, ce qui donnera les cordes supplémentaires et, par suite, la direction des diamètres. Quant à leur grandeur, on la connaît au moyen des points qui ont été trou-

vés sur l'axe focal. En effet, soit N l'un de ces points, on a vu dans le septième livre que l'on avait

$$\overline{OB'}^2 = \frac{c^2.NH}{2a}, \quad \overline{OA'}^2 = \frac{c^2\ NH'}{2a},$$

les points H et H' déterminant les lignes appelées *homologues*. Mais, parmi les trente-trois problèmes dont se compose ce huitième livre restitué, on regrette de ne pas voir le suivant :

Étant donné en grandeur et en direction un système quelconque de diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, trouver les axes en grandeur et en direction.

Outre le grand ouvrage dont nous avons tenté de faire l'analyse, Apollonius avait composé divers traités dont il reste peu de chose. Ceux qui désireraient quelques nouveaux détails bibliographiques relatifs à notre auteur, peuvent consulter une intéressante Notice insérée par M. Terquem dans le troisième volume des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* année 1844.

Maintenant, si nous réfléchissons sur les méthodes qui ont guidé les anciens et surtout Apollonius dans leurs recherches sur les coniques, nous trouverons que l'on s'en fait quelquefois une idée assez éloignée de la vérité. Sans disposer des ressources de l'Algèbre moderne, les mathématiciens de l'antiquité possédaient, comme nous avons eu bien des occasions de le constater, des procédés de calcul extrêmement simples, puisqu'ils étaient basés sur les proportions, mais féconds plus qu'on ne le suppose, grâce à l'habitude qui les avait alors rendus faciles. Nous devons regarder Apollonius en particulier comme un esprit essentiellement analytique, et l'on a dû remarquer chez lui une tendance très-prononcée à ramener au calcul une foule de questions.

Souvent aussi l'on s'est exagéré le goût des anciens pour les considérations purement géométriques : sans doute ce goût était plus général chez eux que chez nous, à cause de l'insuffisance de leur analyse; mais une pareille aptitude peut se développer à toutes les époques, et la science moderne a compté et compte encore, dans cette branche des mathématiques, plusieurs noms assez illustres pour que nous n'ayons pas besoin de les rappeler ici. Mais, pour ne parler que des

sections coniques, on serait tenté de chercher dans notre auteur la trace du beau théorème de M. Dandelin, pour déterminer les foyers au moyen de sphères inscrites au cône droit et tangentes au plan sécant, si l'on ne savait que le foyer de la parabole n'était pas connu d'Apollonius, non plus que les directrices des trois courbes; l'étude des coniques présentait donc alors une lacune importante, même au point de vue purement géométrique.

Nous dirons, en terminant, que nous n'avons point prétendu faire connaître complétement Apollonius, mais seulement donner l'idée générale de son génie et de ses méthodes aux mathématiciens qui n'auraient pas son ouvrage à leur disposition, ou encore en faciliter la lecture à ceux qui désireraient consulter ce monument de la science, qu'aucune analyse, même plus complète que la nôtre, ne pourra jamais remplacer.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DEUXIÈME ARTICLE.

Dans ce second article, au lieu de considérer un nombre $2m$ simplement pair, nous prenons un nombre $2^\alpha m$ divisible par une puissance quelconque de 2. Ainsi l'exposant α est pris à volonté dans la suite naturelle 1, 2, 3, 4,...; mais il ne peut pas se réduire à zéro, en sorte que $2^\alpha m$ est toujours un nombre pair. Quant au facteur m, il est impair : nous posons comme d'habitude $m = d\delta$, représentant ainsi par d un quelconque des diviseurs de l'entier m, et par δ le diviseur conjugué ou complémentaire à d.

Décomposons $2^\alpha m$ en deux parties impaires m', m'' dont $2^\alpha m$ soit la somme. En d'autres termes posons

$$2^\alpha m = m' + m'',$$

m' prenant les valeurs successives

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ 2^\alpha m - 1,$$

tandis que m'' prend les valeurs correspondantes

$$2^\alpha m - 1,\ 2^\alpha m - 3,\ldots,\ 3,\ 1.$$

Nous faisons d'ailleurs

$$m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta'',$$

à l'imitation de ce qu'on a fait tout à l'heure pour le nombre m.

Cela posé, désignons par $f(x)$ une fonction arbitraire, mais telle pourtant que l'on ait

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x qu'on aura à placer sous le signe f ; et considérons, comme dans notre premier article, la somme triple

$$S = \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] \right\},$$

dans laquelle les deux premières sommations portent sur les diviseurs d', d'' des deux entiers impairs m', m'' composant un quelconque des groupes dont il vient d'être question et qui donnent $m' + m'' = 2^\alpha m$. Le troisième $\sum$ indique qu'après avoir trouvé les sommes partielles, on doit en faire le total pour tous ces groupes. Ce total S peut s'exprimer très-simplement au moyen des seuls diviseurs d du nombre m. En effet, je me suis assuré que

$$S = 2^{\alpha-1} \sum d [f(0) - f(2^\alpha d)].$$

Ainsi, l'on a cette formule remarquable

$$(a) \quad \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] \right\} = 2^{\alpha-1} \sum d [f(0) - f(2^\alpha d)],$$

qui complète heureusement la formule (A) de notre premier article. Ce serait la formule (A) elle-même, si l'on avait $\alpha = 1$.

En prenant

$$f(x) = x^2,$$

la formule (a) nous donne

$$\sum \left(\sum \sum d' d'' \right) = 2^{3\alpha-3} \sum d^3.$$

Représentons à notre ordinaire par $\zeta_\mu(m)$ la somme des puissances de degré μ des diviseurs d du nombre m, et le second membre s'écrira

$$2^{3\alpha-3} \zeta_3(m).$$

Quant au premier membre, on remarquera d'abord que la double

somme

$$\sum\sum d'd''$$

équivaut au produit

$$\sum d' \cdot \sum d'',$$

c'est-à-dire à

$$\zeta_1(m')\,\zeta_1(m'').$$

En faisant donc le total pour tous les groupes m', m'', on aura finalement

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'') = 2^{3\alpha-3}\zeta_3(m),$$

d'où il est aisé de conclure que le nombre des décompositions de l'octuple d'un entier quelconque, je veux dire de

$$4 . 2^{\alpha} m,$$

en une somme de huit carrés impairs, est exprimé par

$$2^{3\alpha-3}\zeta_3(m).$$

En particulier soit $m = 1$, et nous voyons que le nombre des décompositions de

$$2^{\alpha+2}$$

en une somme de huit carrés impairs est égal à

$$2^{3\alpha-3}:$$

on suppose, je le répète, l'exposant α au moins égal à l'unité.

L'équation qui concerne ce cas particulier de $m = 1$ semble mériter qu'on la transcrive. La voici :

$$\zeta_1(1)\zeta_1(2^{\alpha}-1)+\zeta_1(3)\zeta_1(2^{\alpha}-3)+\zeta_1(5)\zeta_1(2^{\alpha}-5)+\ldots+\zeta_1(2^{\alpha}-1)\zeta_1(1)=2^{3\alpha-3}.$$

Le théorème de Jacobi sur le nombre des décompositions du quadruple d'un entier impair en une somme de quatre carrés impairs revient à dire que l'on a l'identité

$$(x+x^9+x^{25}+\ldots)^4 = x^4\zeta_1(1)+x^{12}\zeta_1(3)+\ldots+x^{4m}\zeta_1(m)+\ldots,$$

le nombre m étant impair dans le second membre. C'est en effet de cette identité établie dans ses *Fundamenta nova* que Jacobi a d'abord tiré le théorème dont nous parlons; mais plus tard il en a donné une démonstration directe, de sorte qu'à son tour l'identité algébrique citée serait fournie par les seuls principes de la théorie des nombres.

La formule

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'') = 2^{3\alpha-3}\zeta_3(m)$$

peut servir à son tour à trouver la huitième puissance de la série

$$x + x^9 + x^{25} + \ldots.$$

Elle montre en effet que le coefficient de $x^{8\mu}$ dans le développement de

$$(x + x^9 + x^{25} + \ldots)^8,$$

ou, ce qui revient au même, dans le développement de

$$[x^4\,\zeta_1(1) + x^{12}\,\zeta_1(3) + \ldots]^2,$$

s'obtiendra en posant

$$\mu = 2^{\alpha-1}m,$$

m étant impair : il s'exprimera par

$$2^{3\alpha-3}\zeta_3(m).$$

Je n'ai pas besoin d'ajouter que tous les exposants de x dans le développement dont nous parlons sont des multiples de 8, et que c'est pour cela que j'ai parlé uniquement du coefficient de $x^{8\mu}$. L'équation qu'on obtient définitivement, savoir,

$$(x + x^9 + x^{25} + \ldots)^8 = \sum\sum\left[2^{3\alpha-3}\zeta_3(m)\,x^{2^{\alpha+2}m}\right],$$

où la double sommation porte sur les valeurs 1, 2, 3, 4, 5,... de α, et 1, 3, 5, 7,... de m, s'accorde, bien entendu, avec les formules elliptiques de Jacobi.

Puisqu'il a été question de la série

$$x + x^9 + x^{25} + \ldots,$$

je ferai observer qu'elle s'exprime par une suite infinie de fractions, savoir :

$$\frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} - \frac{x^7}{1-x^{14}} + \frac{x^9}{1-x^{18}} - \ldots.$$

Le terme général est

$$\frac{\lambda(m)\,x^m}{1-x^{2m}},$$

m étant un nombre impair et $\lambda(m)$ une fonction numérique dont nous avons parlé ailleurs, et qui est égale à 1 ou à -1, suivant que le nombre total des facteurs premiers égaux ou inégaux dont m est le produit est pair ou impair.

Pour la série

$$x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots,$$

le terme général de l'expression en fractions de la forme

$$\frac{x^s}{1-x^s}$$

serait

$$\frac{\lambda(s)\,x^s}{1-x^s},$$

s prenant successivement toutes les valeurs 1, 2, 3, 4,....

Revenons à la formule (a) pour y faire

$$f(x) = x^4.$$

Il s'ensuivra facilement

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_3(m'') = 2^{5\alpha-5}\,\zeta_5(m):$$

d'où l'on conclura que

$$2^{5\alpha-5}\,\zeta_5(m)$$

est le nombre des décompositions de

$$2^{\alpha+3}.m$$

en une somme de huit carrés impairs, formant un multiple impair de 8, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs.

Soit généralement

$$f(x) = x^{2\mu}:$$

il nous viendra

$$2^{2\alpha\mu+\alpha-2}\zeta_{2\mu+1}(m) = \frac{2\mu}{1}\sum\zeta_1(m')\zeta_{2\mu+1}(m''')$$
$$+\frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{1.2.3}\sum\zeta_3(m')\zeta_{2\mu-3}(m'')+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{2\mu}{1}\sum\zeta_{2\mu-1}(m')\zeta_1(m'').$$

Enfin, soit

$$f(x) = \cos xt$$

t désignant une constante quelconque. On trouvera

$$\sum\left(\sum\sin d't\cdot\sum\sin d''t\right) = 2^{\alpha-1}\sum d\sin^2(2^{\alpha-1}dt).$$

Je ne m'arrêterai pas à faire d'autres applications de la formule (a). Je passe de suite à une seconde formule qui comprend comme cas particulier la formule (a) et qui répond à la formule (B) de notre premier article.

Considérons la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'',d'-d'')]\right\}$$

où nous conservons toutes les notations ci-dessus, en sorte que d' et d'' sont des diviseurs quelconques des deux nombres impairs m', m'' dont la somme $m'+m''$ forme le nombre donné $2^\alpha m$: δ', δ'' sont les diviseurs complémentaires à d', d''. Les deux premières sommations con-

cernent les diviseurs d', d'', δ', δ'' appartenant à un groupe (m', m'') pris à volonté, et le troisième $\sum$ nous apprend qu'il faut ensuite réunir ces sommes partielles en un total qui comprenne tous les groupes. Enfin la fonction $f(x, y)$ est arbitraire, mais telle pourtant que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y),$$

pour toutes les valeurs de x, y dont on fera usage.

Cela posé, je dis que la somme triple dont il s'agit peut s'exprimer par une somme simple relative aux seuls diviseurs d de l'entier impair donné m. La valeur de la somme que voici

$$2^{\alpha-1}\sum d\left[f(0, 2^\alpha d) - f(2^\alpha d, 0)\right]$$

est en effet égale à celle de la somme triple.

En d'autres termes, on a

$$(b)\quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}=2^{\alpha-1}\sum d[f(0,2^\alpha d)-f(2^\alpha d,0)].$$

Cette formule répond, comme nous l'avions annoncé, à la formule (B) de notre premier article. Ajoutons-en une autre équivalente et qui répondra à la formule (C). On a

$$(c)\quad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(d'+d'', \delta'-\delta'')]\right\}=2^{\alpha-1}\sum d[f(0,2^\alpha d)-f(2^\alpha d,0)].$$

Je me contenterai, pour le moment du moins, d'indiquer une seule application. Prenons, dans la formule (c),

$$f(x, y) = \cos xt \cos yz,$$

t et z désignant des constantes quelconques : faisons de plus, comme dans notre premier article, et relativement à tout entier impair $m = d\delta$,

$$\sum \sin dt \cos \delta z = \psi(m), \quad \sum \cos dt \sin \delta z = \varpi(m);$$

et nous arriverons à la formule

$$\sum \psi(m')\psi(m'') - \sum \varpi(m')\varpi(m'') = 2^{\alpha-1} \sum d[\sin^2(2^{\alpha-1}dt) - \sin^2(2^{\alpha-1}d\varepsilon),$$

que nous regardons comme importante.

Il serait aisé d'ajouter d'autres exemples ; mais nous croyons en avoir assez dit pour que le sens de nos formules soit bien fixé et leur utilité mise hors de doute.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

TROISIÈME ARTICLE.

Dans ce troisième article, nous considérerons un nombre impair m, que nous décomposerons en deux parties, l'une impaire m', et l'autre paire et différente de zéro; nous représenterons celle-ci par $2^{\alpha''}m''$, le facteur m'' étant impair. En d'autres termes, nous ferons

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

en prenant successivement pour m' les valeurs impaires $1, 3, 5 \ldots m-2$, et déterminant ensuite m'' par l'équation

$$2^{\alpha''} m'' = m - m',$$

en sorte que α'' indique la plus haute puissance de 2 qui divise le nombre pair $m - m'$.

Nous désignerons par d un quelconque des diviseurs de m, par d' un diviseur quelconque de m', et par d'' un quelconque des diviseurs de m''.

Cela posé, soit $f(x)$ une fonction telle, que l'on ait

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : ces valeurs seront, comme on le verra, des nombres pairs. Nous aurons la formule assez curieuse que voici :

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} f(0)\zeta_1(m) = \sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)]\\ + 2\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'') - f(d'+d'')]\right\}; \end{aligned}\right.$$

dont nous devons d'abord exposer nettement la composition.

Au premier membre, on désigne par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m.

Au second membre, nous avons deux sommes très-distinctes, la première relative aux diviseurs d du nombre m, la seconde portant au contraire sur les diviseurs d', d'' des nombres impairs m', m'', formant un couple pour lequel on ait

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

comme il a été expliqué plus haut.

Pour obtenir la première somme

$$\sum [f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)],$$

il faut considérer chaque diviseur d du nombre m, former pour lui la somme

$$f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1),$$

qui se réduit à son premier terme $f(0)$ lorsqu'il s'agit du diviseur 1, et ensuite faire le total de toutes les sommes partielles ainsi obtenues pour les diverses valeurs de d. On voit que $f(0)$ figure dans ce total autant de fois que m a de diviseurs, tandis qu'en général $2f(2s)$ s'y retrouve autant de fois que m a de diviseurs plus grands que $2s$.

Quant à la somme

$$2\sum \left\{ \sum\sum [f(d'-d'') - f(d'+d'')] \right\},$$

c'est une somme triple qui porte d'abord pour chaque groupe m', m'' sur tous les diviseurs d', d'', et qui doit être prise finalement pour tous ces groupes. Ce sont déjà de telles sommes triples que nous avons rencontrées dans nos deux premiers articles. Le lecteur doit être parfaitement familiarisé aujourd'hui avec notre notation.

Comme première application de la formule (D), prenons

$$f(x) = (-1)^{\frac{x}{2}},$$

fonction numérique qui vérifie la condition imposée $f(-x) = f(x)$.

parce que d, d', d'' étant impairs, la valeur de x dans nos formules est toujours paire. En observant que l'on a

$$(-1)^{\frac{d'-d''}{2}} = -(-1)^{\frac{d'+d''}{2}} = (-1)^{\frac{d'-1}{2}}.(-1)^{\frac{d''-1}{2}},$$

et

$$(-1)^{\frac{d'+d''}{2}} = -(-1)^{\frac{d'-1}{2}}.(-1)^{\frac{d''-1}{2}},$$

on voit que notre somme triple

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}$$

devient ici

$$4\sum\left[\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}.\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right].$$

Quant à la somme

$$\sum\left[f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(d-1)\right],$$

on l'obtiendra en remarquant que l'on a successivement

$$f(0)=1,\quad f(2)=-1,\quad f(4)=1,\quad f(6)=-1\ldots,$$

par suite

$$f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(d-1)=(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

ce qui réduit la somme cherchée à l'expression concise

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}:$$

c'est, comme on sait, le nombre de manières dont on peut décomposer $2m$ en une somme de deux carrés impairs.

Posons pour abréger

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}=\rho(m),$$

en sorte que $\rho(m)$ soit la valeur de notre somme simple. La somme

26..

triple s'écrira

$$4\sum \rho(m')\,\rho(m''),$$

et nous aurons définitivement

$$\sum \rho(m')\,\rho(m'') = \frac{1}{4}[\zeta_1(m) - \rho(m)].$$

Comme on a

$$2m = 2m' + 2^{\alpha''}.2m'',$$

il sera aisé d'en conclure que le nombre des représentations de $2m$, c'est-à-dire du double de l'entier impair donné m, par la formule

$$y^2 + z^2 + 2^{\alpha}(u^2 + v^2),$$

où y, z, u, v sont des entiers positifs impairs, et où l'exposant α est à volonté, mais > 0, a pour valeur

$$\frac{1}{4}[\zeta_1(m) - \rho(m)],$$

c'est-à-dire est égal au quart de l'excès du nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs sur le nombre des décompositions de $2m$ en deux carrés impairs.

Il est aisé de voir que

$$\frac{1}{4}[\zeta_1(m) - \rho(m)]$$

est aussi le nombre des décompositions de l'entier impair m sous la

$$y^2 + z^2 + 2^{\alpha}(u^2 + v^2),$$

où y et u continuent à être des entiers impairs positifs, mais où z et v sont des nombres pairs qui peuvent avoir indifféremment des valeurs positives, négatives ou nulles.

Soit, en second lieu,

$$f(x) = x^2.$$

Cette valeur, substituée dans la formule (D), nous donne

$$\sum\left(\sum\sum d'\,d''\right) = \frac{1}{4}\sum[2^2 + 4^2 + \ldots + (d-1)^2].$$

Or on a

$$\sum\left(\sum\sum d' d''\right) = \sum \zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

et d'un autre côté le quart de la somme

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (d-1)^2$$

est égal à cette autre somme

$$1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{d-1}{2}\right)^2,$$

égale elle-même, comme on sait, à

$$\frac{d^3 - d}{24}.$$

En représentant donc par $\zeta_3(m)$ la somme des cubes des diviseurs de m, comme déjà par $\zeta_1(m)$ la somme de ces diviseurs, on aura finalement

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{1}{24}[\zeta_3(m) - \zeta_1(m)],$$

ce qui donne un théorème sur la décomposition de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs, plus le produit d'une autre somme semblable par une puissance de 2. Le nombre des décompositions dont nous parlons (m étant impair) est exprimé par

$$\frac{1}{24}[\zeta_3(m) - \zeta_1(m)].$$

On pourrait continuer et prendre pour $f(x)$ une puissance paire quelconque de x. Mais je n'insiste pas sur ces détails.

Nous aurons une formule plus curieuse en posant

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque. Il vient alors

$$\zeta_1(m) = \frac{\sum \sin dx}{\sin x} + 4\sum\left(\sum \sin d'x \sum \sin d''x\right).$$

Cette formule conduit à divers théorèmes qui ont de l'intérêt, et sur lesquels je reviendrai une autre fois.

A côté de la formule (D), plaçons maintenant une autre formule qui en diffère en apparence plutôt qu'au fond, et qui suppose comme elle le nombre m impair et mis sous la forme

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

m' et m'' étant aussi impairs. Dans cette nouvelle formule, la fonction $f(x)$, pour laquelle on avait

$$f(-x) = f(x),$$

sera remplacée par une autre fonction $F(x)$ qui devra au contraire vérifier la condition

$$F(-x) = -F(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on fera usage et qui seront, comme on va le voir, des entiers impairs. Je trouve en effet que la somme triple

$$\sum \left\{ \sum\sum [F(d'-d''+1) - F(d'-d''-1) - F(d'+d''+1) + F(d'+d''-1)] \right\}$$

est égale à

$$F(1)\zeta_1(m) - \sum F(d).$$

Ainsi on a

$$\text{(E)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left\{ \sum\sum [F(d'-d''+1) - F(d'-d''-1) - F(d'+d''+1) + F(d'+d''-1)] \right\} \\ &\qquad = F(1)\zeta_1(m) - \sum F(d). \end{aligned} \right.$$

Nous désignons, comme toujours, par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs d de m. La somme

$$\sum F(d)$$

concerne ces diviseurs d. Quant à la somme placée au premier membre, c'est une somme triple du genre de celles que nous avons déjà don-

nées. Les deux premiers $\sum$ sont relatifs aux diviseurs d', d'' qui appartiennent à deux quelconques des nombres m', m'' pour lesquels

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

et le troisième $\sum$ indique qu'après avoir ainsi obtenu pour chaque groupe m', m'' une somme partielle, on doit faire le total pour tous les groupes.

Les deux formules (D), (E), quoique très-différentes dans la forme, reviennent au même pourtant dans le fond et donnent les mêmes résultats. Mais voici une troisième formule très-remarquable aussi et qui diffère essentiellement des deux autres. La fonction $f(x)$ qui y figure doit jouir, comme dans la formule (D), de la propriété que

$$f(-x) = f(x);$$

mais les quantités placées sous le signe f sont tout autres; ce sont des nombres impairs et non plus des nombres pairs.

Continuant en effet à supposer

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

m, m', m'' étant des nombres impairs dont le premier m est donné, et dont le second m' doit prendre successivement les valeurs

$$1,\ 3,\ 5, \ldots m - 2,$$

désignons à notre ordinaire par d un quelconque des diviseurs de m, par d' un quelconque des diviseurs de m', par d'' un quelconque des diviseurs de m'', et enfin par δ le diviseur conjugué à d qui donne $m = d\delta$, puis considérons pour l'ensemble des groupes m', m'' la somme triple

$$\sum \left\{ \sum\sum \left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'') \right] \right\},$$

et notre formule consistera en ce que le double de cette somme triple

équivaudra à la série simple

$$\sum (\delta - d) f(d),$$

qui ne concerne que les diviseurs du nombre m.

En d'autres termes, on a

$$(F)\quad 2\sum \left\{ \sum\sum [f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')] \right\} = \sum (\delta - d) f(d).$$

On voit que cette formule diffère essentiellement des formules (D) et (E), ainsi que nous l'avions annoncé.

Contentons-nous d'une seule application. Soit

$$f(x) = x^2 :$$

la formule (F) nous donnera

$$\sum [2^{\alpha''} \zeta_1(m') \zeta_1(m'')] = \frac{1}{8}[\zeta_3(m) - m\zeta_1(m)],$$

ainsi qu'il est aisé de s'en assurer. La présence du facteur $2^{\alpha''}$ distingue cette équation des équations analogues que nous avions déjà rencontrées.

TABLES DE LA LUNE

CONSTRUITES

D'APRÈS LE PRINCIPE NEWTONIEN DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE;

PAR P.-A. HANSEN,
Directeur de l'observatoire ducal de Gotha.

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. PUISEUX.

[Extrait des *Nouvelles astronomiques*, n° 1128.]

M. Hansen, qui a déjà tant avancé la science par ses recherches sur les perturbations, donne de sa théorie, dans l'ouvrage que nous annonçons, une application importante et intéressante à divers titres. Les inégalités du mouvement de la lune, à raison même de leur grandeur et de leur nombre, étaient particulièrement propres à mettre en évidence les avantages de la méthode de l'auteur, aussi bien qu'à décider jusqu'à quel point la loi d'attraction de Newton peut représenter les mouvements des corps célestes.

Euler s'était déjà proposé, dans ses recherches sur la lune, de calculer théoriquement toutes les inégalités, à l'exception du mouvement des nœuds et de celui des absides; mais quelque loin qu'il eût poussé sa théorie, on se convainquit bientôt qu'elle ne satisfaisait pas aux conditions que l'auteur s'était imposées. Tobie Mayer apporta à la théorie d'Euler de notables perfectionnements; il en déduisit principalement la forme des inégalités, mais ne calcula théoriquement que ceux des coefficients qui pouvaient être déterminés sûrement de cette manière, et rectifia les autres à l'aide des observations. Il y joignit d'ailleurs quelques inégalités que l'observation lui avait indiquées, mais dont il n'avait pas trouvé l'explication dans la théorie de la pesanteur. Mason et plus tard Bürg perfectionnèrent encore les Tables de la lune par une détermination plus précise des éléments de l'orbite et par l'in-

troduction de plusieurs inégalités indiquées par la théorie : mais, comme Tobie Mayer, ils tirèrent des observations le plus grand nombre des coefficients.

Laplace approcha beaucoup plus que ses prédécesseurs du but qu'Euler s'était proposé : non-seulement il donna une détermination théorique plus exacte des coefficients des inégalités déjà connues, mais il en calcula un grand nombre de nouvelles. Parmi ces dernières, celle qui dépend de l'aplatissement de notre globe offrait un intérêt particulier, attendu qu'en tirant son coefficient des observations, on obtenait une nouvelle détermination de l'un des éléments du sphéroïde terrestre. Ce grand géomètre fit faire encore un progrès considérable à la théorie de la lune par la découverte de l'inégalité séculaire du moyen mouvement de cet astre, inégalité dont la comparaison des observations anciennes et modernes avait déjà indiqué l'existence. Par là fut écartée l'objection la mieux fondée qu'on eût élevée contre l'exactitude de la loi d'attraction de Newton, et en même temps l'invariabilité de la durée de la rotation de la terre depuis l'époque d'Hipparque se trouva démontrée.

Laplace tira de sa théorie les coefficients de toutes les inégalités considérées par lui, à l'exception de celles qui dépendent de la parallaxe du soleil et de l'aplatissement de la terre. Il emprunta également aux observations les moyens mouvements des nœuds et des absides, pensant que la théorie ne pourrait jamais les donner avec la même précision.

Burckhardt utilisa les recherches de Laplace pour la construction de ses Tables de la lune. Par là et par une détermination plus exacte des éléments de l'orbite, à l'aide des observations de Bradley que Bürg n'avait pu utiliser, les Tables de Burckhardt atteignirent une précision supérieure à celles des Tables précédentes. Par l'ordre du Bureau des Longitudes, on les compara avec cent soixante-six observations faites à Greenwich et à Paris dans l'intervalle du 19 juin 1802 au 24 juin 1807. Cette comparaison donna pour l'écart moyen entre les observations et les Tables les valeurs suivantes :

	Longitude.	Déclinaison.
Tables de Burckhardt....	5'',27	5'',83
Tables de Bürg.........	6,53	6,37

Toutefois l'erreur des Tables de Burckhardt est devenue plus considérable dans ces dernières années, et lors de l'éclipse totale de soleil du 28 juillet 1851, elle atteignait 29 secondes.

Indépendamment d'une plus grande précision, les Tables de Burckhardt ont encore sur les précédentes l'avantage que leur disposition les rend d'un emploi plus commode. A l'exception de l'évection, de l'équation du centre, de la variation et de la réduction, les arguments de toutes les Tables ont été remplacés par leurs valeurs moyennes : la formation des arguments devient dès lors beaucoup plus simple et on évite le calcul préalable du lieu du soleil.

En 1820, sur la proposition de Laplace, l'Académie des Sciences de Paris choisit pour sujet de prix la construction de Tables de la lune fondées uniquement sur la théorie et offrant la même précision que les Tables établies à la fois sur la théorie et sur les observations. Ce fut l'occasion pour Damoiseau et surtout pour Plana de perfectionner considérablement la théorie de la lune. Damoiseau publia des Tables construites d'après sa théorie, d'abord suivant la division décimale, puis suivant la division sexagésimale du cercle. C'est d'après les dernières qu'ont éte calculées les éphémérides de la lune données par Schumacher pour les années 1833 à 1835. M. Lamont les a comparées avec ses observations méridiennes faites en 1833 à l'observatoire de Munich. Cette comparaison a donné les résultats suivants :

48 observations; erreur moyenne..... $\Delta\alpha\cos\delta = 6'',34$,
42 observations; erreur moyenne..... $\Delta\delta = 4,49$.

Ainsi les Tables de Damoiseau n'étaient guère plus précises pour l'année 1833 que les Tables de Burckhardt pour l'époque de leur publication. Mais tandis qu'au 28 juillet 1851 l'erreur de celles-ci s'élevait, comme on l'a déjà dit, à 29 secondes, les Tables de Damoiseau n'étaient en erreur que de 9 secondes.

Plana poussa beaucoup plus loin que ses devanciers le développement des coefficients des inégalités en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, etc., de l'orbite lunaire, et son travail est incontestablement un des plus importants qui aient paru jusqu'ici sur cette théorie.

Mais dans de pareils développements on peut toujours craindre que

certains des termes négligés n'aient des coefficients considérables et n'acquièrent par suite une valeur sensible. Or la méthode de M. Hansen ne laisse subsister aucun doute de ce genre, puisqu'elle détermine le coefficient de chaque inégalité avec une erreur inférieure à une limite fixée à volonté dès le commencement du calcul. Elle a encore sur les théories précédentes cet avantage, que pour atteindre un égal degré de précision dans le calcul de l'ensemble des perturbations, elle n'emploie pas un nombre de termes aussi considérable : de plus, elle fournit plusieurs équations de condition qui servent à la vérification des calculs numériques.

M. Hansen avait développé les perturbations provenant de l'action du soleil assez complétement pour pouvoir en répondre à $0'',02$ près, limite qu'il s'était imposée à l'avance. Quant aux perturbations qui dépendent de l'attraction des planètes, il en avait cru d'abord la détermination assez simple pour pouvoir utiliser, sans aucune modification, les recherches de Laplace et de Damoiseau sur ce point. Mais il reconnut ensuite que là encore il y avait d'importantes lacunes à combler.

Toutes les observations méridiennes de la lune faites à Greenwich de 1750 à 1830 ont été, sous la direction de M. Airy, réduites et comparées à la théorie de Plana; les écarts moyens calculés pour des périodes de quatre à dix ans atteignaient encore un maximum de $4'',6$, et la marche régulière des erreurs indiquait des inégalités à longues périodes négligées jusqu'à présent. M. Hansen fut amené par là à examiner de plus près les perturbations causées par l'attraction des planètes: il trouva, en effet, deux inégalités à longues périodes, dues à l'attraction de Vénus, et dont l'introduction faisait disparaître à peu près complétement les différences mentionnées ci-dessus entre le calcul et l'observation. Mais, contrairement à ce qu'il avait pensé d'abord, il reconnut que la détermination exacte, par la théorie, des coefficients des inégalités de la lune dues aux actions planétaires, était le point le plus difficile de la théorie du mouvement de cet astre.

Les réductions et les comparaisons exécutées sous la direction de M. Airy ont été d'une telle importance pour le perfectionnement de la théorie de la Lune, qu'on nous permettra d'entrer dans quelques détails à ce sujet.

Les longitudes et les distances polaires écliptiques de la lune ont

été comparées avec les lieux du même astre calculés d'après les formules de Plana, et en adoptant pour les éléments de l'orbite et le moyen mouvement les valeurs admises par Damoiseau. De ces comparaisons, M. Airy conclut de nouvelles valeurs des éléments de l'orbite, de la constante de la parallaxe, des moyens mouvements des nœuds et des absides, des coefficients de la variation, de l'évection et de l'équation annuelle, et aussi des coefficients des inégalités qui dépendent de la parallaxe du soleil et de l'aplatissement de la terre. Cette recherche fit découvrir en outre à M. Airy de petites inégalités que la théorie n'avait point encore indiquées.

Le 1[er] volume de l'ouvrage intitulé : *Reduction of the Moon's observations, made at the royal observatory, Greenwich, from* 1750 *to* 1830, *computed under the superintendence of Airy* [*], renferme une suite de Tables dont M. Airy a fait usage dans sa discussion, et qui, combinées avec les Tables de Damoiseau, lui fournissent le lieu de la lune, comme s'il eût été calculé d'après la théorie de Plana, et avec les éléments de l'orbite et les moyens mouvements des nœuds et des absides tels que Damoiseau les a déterminés. M. Airy a seulement négligé quelques petits termes donnés par Plana, dont les coefficients ne dépassent pas 0″,2.

Les résultats des recherches entreprises et publiées jusqu'ici sur le mouvement de la lune se trouvent réunis dans l'ouvrage suivant :

Tables of the Moon, constructed from Plana's theorie, with Airy's and Longstreth's corrections, Hansen's two inequalities of long period arising from the action of Venus, and Hansen's values of the secular variations of the mean motion and of the motion of the perigee. Arranged in a form designed by professor Benjamin Peirce, under the superintendence of Charles Henry Davis, and published under the authority of John P. Kennedy. Washington, 1853 [**].

---

[*] Réduction des observations de la Lune faites de 1750 à 1830 à l'observatoire royal de Greenwich, calculée sous la direction de M. Airy.

[**] Tables de la lune fondées sur la théorie de Plana, avec les corrections d'Airy et de Longstreth, les deux inégalités à longues périodes de Hansen résultant de l'action de Vénus, et les valeurs données par le même astronome pour les variations séculaires du moyen mouvement et du mouvement du périgée. Disposées suivant la

Les bases de ces Tables sont, comme le titre l'indique, 1° les éléments de l'orbite et les moyens mouvements des nœuds et des absides, tels qu'ils résultent des recherches déjà citées de M. Airy; 2° les expressions des inégalités données par Plana, avec les corrections apportées par M. Airy à quelques-unes d'entre elles; 3° les inégalités empiriques découvertes par M. Airy; 4° les inégalités dépendantes de l'attraction de Vénus et les variations séculaires du moyen mouvement de la lune et du mouvement du périgée, telles que M. Hansen les a données dans le n° 597 des *Nouvelles astronomiques;* 5° les petites corrections empiriques apportées par Longstreth à quelques inégalités de Plana.

La publication de cet ouvrage paraît due au désir de satisfaire, avant l'entier achèvement du travail de M. Hansen, et autant que la chose était possible, au besoin pressant qu'éprouvaient les astronomes de Tables de la lune dont la précision répondît à l'état actuel de la science.

Revenons à présent aux recherches de M. Hansen. Après qu'il eut découvert les inégalités à longues périodes produites par l'attraction de Vénus, le savant astronome développa les autres perturbations causées par l'action plus ou moins directe des planètes, d'une manière assez complète pour être sûr de ne laisser échapper aucun terme sensible. Ce travail lui donna l'explication théorique des nouvelles inégalités que M. Airy avait reconnues par les observations. Il détermina théoriquement les coefficients de ces inégalités comme de toutes les autres, à l'exception de ceux qui ne peuvent être tirés que des observations; il a la conviction que tous ces coefficients sont déterminés à 0",2 près, et même que la plupart le sont beaucoup plus exactement.

Les recherches de M. Hansen l'ont conduit à un grand nombre de résultats nouveaux, et indépendamment de ceux que nous avons déjà cités, nous devons mentionner particulièrement cette découverte, que le centre de gravité de la lune ne coïncide pas avec le centre de sa

---

forme indiquée par le professeur Benjamin Peirce, sous la direction de Charles Henry Davis, et publiées par John P. Kennedy. Washington, 1853.

surface. D'après M. Hansen, la distance de ces deux points s'élève à environ 8 milles géographiques, le centre de gravité étant plus éloigné de nous de cette quantité que le centre de figure. Cette circonstance accroît de 0″,69 le coefficient de l'évection. Les coefficients des autres inégalités de la longitude moyenne doivent être augmentés dans le même rapport.

Les moyens mouvements des nœuds et des absides auraient pu aussi être déduits en toute rigueur de la théorie de M. Hansen; mais le nombre des termes à calculer eût été tellement grand et le travail si pénible, que M. Hansen a préféré les tirer des observations. Il a employé pour cet objet, d'une part les observations de Greenwich de 1750 à l'époque actuelle réduites par M. Airy, d'autre part les observations méridiennes de Dorpat. Les éléments de l'orbite ont été conclus des observations méridiennes les plus récentes de Greenwich et de Dorpat. M. Hansen n'a donc employé, pour la construction de ses Tables, aucun élément de calcul qu'il n'ait tiré lui-même de sa théorie ou des observations.

Pour mettre à l'épreuve la précision de ses Tables, M. Hansen les a comparées à des observations méridiennes soit récentes, soit anciennes. Il a pris les premières au hasard parmi les observations faites à Greenwich, du 8 mars 1824 au 27 septembre 1850. Voici les valeurs moyennes des erreurs :

139 observations....... $\Delta\alpha \cos\delta = 2'',62$,
157 observations..... $\Delta\delta = 2'',10$.

Ces moyennes ne sont guère plus grandes que les erreurs moyennes des observations d'étoiles fixes faites aux mêmes instruments, et comme l'observation de la lune n'est pas susceptible de la même précision que celle d'une étoile, il est permis de les attribuer aux observations. Si l'on compare ces erreurs avec celles des Tables de Burckhardt et de Damoiseau que nous avons rapportées ci-dessus, on voit à quel point les Tables de Hansen les surpassent en précision, pour l'époque même de la publication des premières.

Les observations de Bradley se trouvent également représentées d'une manière satisfaisante. Celles que M. Hansen a comparées à ses Tables sont comprises entre le 24 octobre 1751 et le 14 mai 1753 : elles

lui ont donné, pour les erreurs moyennes, les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} 62 \text{ observations} \ldots\ldots & \Delta\alpha \cos\delta = 3'',78, \\ 57 \text{ observations} \ldots\ldots & \Delta\delta = 5'',79. \end{array}$$

Ces erreurs peuvent encore être attribuées aux observations seules, si l'on considère que les déclinaisons ont été obtenues à l'aide du quart de cercle en fer de Graham, et que Bessel a trouvé cet instrument trop défectueux pour pouvoir employer dans ses *Fundamenta* les observations qu'il a servi à faire.

Il suit de ce qui précède, que les Tables de Hansen représentent les observations méridiennes qu'on leur a comparées avec une précision qui ne laisse rien à désirer. Il était donc très-intéressant de rechercher jusqu'à quel point les documents qui nous sont parvenus sur quelques éclipses de soleil observées dans l'antiquité, s'accordent avec les mêmes Tables, d'autant plus que M. Hansen n'avait employé aucune éclipse, ancienne ou moderne, pour la détermination des éléments elliptiques de l'orbite et des mouvements des nœuds et du périgée.

L'illustre directeur de l'observatoire de Greenwich a entrepris cette recherche, et en a publié les résultats dans les *Transactions philosophiques* pour 1857. Les éclipses de soleil qu'il a discutées sont celles d'Agathocle, de Larisse, de Thalès et de Sticklastadt.

La première arriva pendant qu'Agathocle retournait de Syracuse en Afrique avec sa flotte, le second jour après son départ, le 15 août de l'an 310 avant J.-C. D'après le récit de Diodore, l'obscurité fut si complète, qu'on put se croire en pleine nuit, et que des étoiles se montrerent dans toute l'étendue du ciel ; il n'est pas douteux d'apres cela que l'éclipse ne fût totale. Quant au lieu de l'observation, on pourrait se demander si Agathocle avait pris la route la plus courte en se dirigeant vers le sud à partir de Syracuse, ou s'il n'avait pas d'abord fait voile vers le nord, de manière à faire le tour de la Sicile. D'après les Tables de Hansen, c'est la première hypothèse qu'il faut adopter, et alors une éclipse totale a dû avoir lieu le second jour après le départ.

Dans cette éclipse, la situation du lieu de l'observation était incertaine à 1° 30′ près en latitude. Pour celle de Larisse, au contraire, on connait exactement le lieu où elle a été vue (aujourd'hui Nimrod) ;

cette dernière éclipse permettait donc de soumettre les Tables de la lune à une épreuve plus décisive.

Xénophon rapporte dans son *Anabasis* que le roi de Perse, après avoir vaincu les Mèdes, avait assiégé longtemps sans succès la ville de Larisse, mais qu'un jour le soleil avait disparu comme voilé par un nuage. Les habitants auraient été découragés par ce phénomène inattendu, et la prise de la ville s'en serait suivie.

On ne peut douter qu'il s'agisse d'une éclipse de soleil, et vraisemblablement d'une éclipse totale. M. Airy examina toutes les éclipses qui ont eu lieu dans l'intervalle de quarante ans, où l'on peut placer l'époque du siége, et trouva qu'en effet, d'après les Tables de Hansen, une éclipse totale et presque centrale de soleil devait avoir eu lieu à Larisse le 19 mai de l'an 556 avant J.-C.

Nous manquons de renseignements précis sur le lieu où l'éclipse de Thalès a été observée. Elle arriva, suivant Hérodote, pendant un combat entre les Lydiens et les Mèdes, et l'obscurité fut telle, que le jour se changea subitement en nuit. Le même historien rapporte que Thalès avait prédit cette éclipse aux Ioniens. Il suit des recherches de M. Airy que le champ de bataille se trouvait dans l'intérieur d'un polygone, ayant pour sommets Sardes, Iconium, Tarse, Issus, Mélitène, Ancyre, Sardes, ou bien que s'il n'était pas en Asie Mineure, il se trouvait à l'est-sud-est du même polygone. Quant à l'époque, on sait positivement que le combat a eu lieu vers l'an 584 avant J.-C. Or M. Airy trouve que, d'après les Tables de Hansen, il y a eu le 28 mai 584 avant J.-C. une éclipse de soleil qui a dû être totale pour une partie considérable du polygone en question, et qui n'est autre sans aucun doute que l'éclipse de Thalès.

Ainsi ces trois éclipses se trouvent représentées par les Tables de Hansen, avec toute l'exactitude que comportent les documents historiques qui nous sont parvenus. M. Airy a encore comparé aux Tables l'éclipse de Sticklastadt, pour laquelle les éléments du calcul lui avaient été fournis par M. Hansen lui-même. M. le professeur Hansteen a donné, dans le numéro complémentaire des *Nouvelles astronomiques*, un compte rendu détaillé de cette éclipse. Elle arriva pendant un combat que les guerriers chrétiens, sous la conduite du roi de Norwége Olaf Haraldsson, livraient à une armée de paysans païens révoltés.

Voici ce qu'en rapporte Snorre Sturlason : « Le temps était beau et le soleil brillait; mais quand la bataille eut commencé, une teinte rougeâtre se répandit sur le ciel et sur le soleil, et, avant que le combat fût terminé, l'obscurité devint aussi grande que pendant la nuit. »

La situation du champ de bataille a été déterminée avec certitude par M. le professeur Hansteen, et les recherches de cet illustre savant fixent positivement la date du combat au 31 août 1030. L'heure du jour à laquelle eut lieu la plus grande obscurité est aussi approximativement connue, puisque, d'après la relation déjà citée, le combat commença vers une heure et demie de l'après-midi et finit avant trois heures.

D'après les Tables de Hansen, l'éclipse n'a pas été totale à Sticklastadt; mais la cent neuvième partie seulement de la surface du soleil a dû rester visible. Comme pendant la plus grande phase le soleil n'était qu'à 25 degrés au-dessus de l'horizon, le jour a dû être considérablement affaibli. M. Airy trouve qu'on obtiendrait une éclipse totale pour Sticklastadt, sans que celle de Larisse cessât de l'être, en augmentant de $0'',809$ l'accélération séculaire tropique. Comme on ne peut mettre en doute l'exactitude de la valeur de l'accélération moyenne déduite par M. Hansen de la loi de la gravitation newtonienne, on serait conduit par là à modifier légèrement cette loi. Mais comme il n'est pas établi d'une manière absolument certaine que les deux éclipses citées aient été totales, on n'est pas suffisamment autorisé à changer la valeur de l'accélération calculée par M. Hansen.

Le résultat de toutes ces épreuves est aussi favorable aux Tables de Hansen qu'on pouvait l'espérer, et on peut regarder comme certain que pendant longtemps elles donneront les lieux de la lune avec une précision supérieure à celle d'observations méridiennes isolées. Si plus tard on vient à déterminer avec une précision plus grande les éléments de l'orbite et les moyens mouvements des nœuds et des absides, les corrections, en tout cas très-petites, qui en résulteront s'introduiront très-aisément dans les Tables. Une valeur durable est donc assurée à l'ouvrage de M. Hansen, puisque les inégalités n'y auront jamais besoin de corrections.

On tire immédiatement des Tables la longitude, la latitude et le loga-

rithme du rayon vecteur de la lune. On n'y a pas introduit toutes les inégalités dont M. Hansen a donné l'expression dans l'introduction ; quelques-unes, dont les coefficients étaient très-petits, ont été négligées, surtout lorsque leur période était très-courte.

On trouve encore à la fin de l'ouvrage des Tables qui facilitent la transformation de la longitude et de la latitude de la lune, en ascension droite et en déclinaison.

NOUVELLE THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE;

PAR M. DELAUNAY.

[Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XLVI.]

(*Séance du* 17 *mai* 1858.)

J'ai l'honneur de faire part à l'Académie de l'achèvement des calculs que j'ai entrepris il y a plus de onze ans, pour effectuer une nouvelle détermination analytique des inégalités du mouvement de la lune dues à l'action perturbatrice du soleil.

On sait quel est l'intérêt qui s'attache à la connaissance exacte du mouvement de la lune sur la voûte céleste. La rapidité avec laquelle ce mouvement s'effectue à travers les constellations zodiacales a depuis longtemps suggéré l'heureuse idée de s'en servir pour la détermination des longitudes en mer. Un marin qui veut trouver la longitude du point où est situé son navire sur l'Océan, a besoin pour cela de connaître deux choses, savoir, 1° l'heure qu'il est, à un certain instant au lieu où il est placé; 2° l'heure qu'il est, au même instant, dans le lieu à partir duquel se comptent les longitudes, à Paris par exemple. La première de ces deux heures s'obtient par des observations astronomiques spéciales auxquelles nous n'avons pas à nous arrêter. Quant à la seconde, elle est indiquée par la position que la lune occupe dans le ciel par rapport aux divers astres qui sont dans son voisinage. On peut assimiler la sphère étoilée à un immense cadran placé dans le ciel, et destiné à faire connaître l'heure de Paris aux marins disséminés sur toute l'étendue des mers : la lune y joue le rôle d'aiguille indicatrice. Mais il faut que les marins sachent lire, sur ce cadran gigantesque, l'heure que la lune y marque à chaque instant. C'est pour remplir cet objet que le Bureau des Longitudes publie plu-

sieurs années à l'avance, dans la *Connaissance des Temps*, une *Table des distances lunaires*, à l'aide de laquelle, connaissant la distance de la lune à un des astres voisins, on peut trouver tout de suite l'heure qu'il était à Paris à l'instant où cette distance a été mesurée. Mais pour calculer la Table des distances lunaires, il faut connaître le mouvement de la lune : l'exactitude de la détermination des longitudes dépend donc essentiellement de la précision avec laquelle on connaît les lois de ce mouvement.

L'importance de cette belle application de la science explique suffisamment les efforts qui ont été faits successivement pour perfectionner la théorie du mouvement de la lune. Mais la question est d'une telle difficulté, que, malgré le concours des plus grands géomètres, on n'a marché que très-lentement vers la solution qu'on avait en vue. Newton, dans son livre des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, s'était contenté de rattacher le mouvement de la lune à sa grande loi de la gravitation universelle, en montrant par quelques exemples que les principales inégalités de la lune indiquées par l'observation sont dues à l'action perturbatrice du soleil. Bientôt, et à peu près en même temps, Clairaut, d'Alembert, Euler établissent les équations différentielles du mouvement de la lune sous les actions combinées de la terre et du soleil; et par l'intégration approximative de ces équations, non-seulement ils confirment les idées de Newton en expliquant toutes les inégalités découvertes antérieurement par l'observation, mais encore ils fournissent une connaissance plus exacte du mouvement de la lune en dévoilant plusieurs inégalités que l'observation n'avait pas pu manifester. Plus tard Laplace fait faire un nouveau pas à la théorie de la lune, en poussant plus loin les approximations, et surtout en découvrant les causes de certaines inégalités dont les astronomes avaient récemment constaté l'existence, et qu'il semblait difficile d'expliquer par l'attraction newtonienne.

Malgré tous ces travaux remarquables, les Tables de la lune n'avaient pu encore être entièrement déduites de la théorie; on avait dû déterminer d'après l'observation la plupart des coefficients des inégalités lunaires dont la théorie avait démontré l'existence. C'est ce qui décida l'Académie des Sciences, sur la demande de Laplace, à proposer, comme sujet de prix à décerner en 1820, la formation, par la

seule théorie, de Tables lunaires aussi exactes que celles qui avaient été construites par le concours de la théorie et des observations. Le prix fut partagé entre Damoiseau d'une part, et MM. Plana et Carlini d'une autre part. Le Mémoire de Damoiseau, qui a été inséré dans le tome III du *Recueil des Savants étrangers*, était accompagné de Tables lunaires qu'on a reconnues au moins aussi exactes que les meilleures de celles qui avaient été employées jusque-là. Celui de MM. Plana et Carlini n'a pas été imprimé; mais il a servi de point de départ à un travail bien plus étendu publié en 1832 par M. Plana seul.

A partir de là, les recherches sur la théorie de la lune entrèrent dans une phase nouvelle. Il semblait difficile de pousser les approximations plus loin que ne l'avaient fait MM. Damoiseau et Plana dans le calcul des inégalités lunaires. Mais la marche qu'ils avaient suivie l'un et l'autre, d'après la *Mécanique céleste* de Laplace, n'est pas celle qui, en dernière analyse, paraît la plus naturelle. Cette marche, qui n'est autre que celle de Clairaut, consiste à exprimer tout d'abord le temps ainsi que la latitude et le rayon vecteur de la lune en fonction de sa longitude vraie prise pour variable indépendante; puis à en déduire l'expression de la longitude vraie, de la latitude et du rayon vecteur en fonction du temps. Il semble beaucoup plus convenable de faire pour la lune ce qu'on fait pour les planètes, c'est-à-dire de chercher directement à exprimer les trois coordonnées de la lune en fonction du temps. C'est ce que proposèrent successivement M. Lubbock, en 1832, Poisson en 1833, et M. Hansen en 1838. Chacun de ces trois géomètres fit connaître une méthode particulière destinée à attaquer ainsi directement le problème du mouvement de la lune. M. Hansen est le seul des trois qui ait fait depuis une application complète de sa méthode; il a effectué le calcul des inégalités lunaires, en poussant les approximations assez loin pour être certain de ne négliger que des quantités réellement négligeables; et il en a déduit des Tables de la lune qui ont été publiées récemment aux frais du Gouvernement d'Angleterre.

Tel était l'état de la question, lorsque, en 1846, j'essayai d'apporter encore quelque amélioration à la théorie de la lune. Le changement capital introduit dans cette théorie par MM. Lubbock, Poisson et Hansen, porte uniquement sur les équations différentielles du mou-

vement de la lune, dans lesquelles ils adoptent pour variable indépendante le temps au lieu de la longitude vraie de la lune. Mais, une fois les équations différentielles obtenues, ils en effectuent l'intégration de la même manière que leurs devanciers; c'est-à-dire que, dans une première approximation, ils déterminent les inégalités qui sont du premier ordre par rapport à la force perturbatrice du soleil, dans une deuxième approximation ils cherchent celles qui sont du second ordre par rapport à cette force perturbatrice, et ainsi de suite. C'est ce mode d'intégration que je cherchai à remplacer par un autre qui permît de pousser les approximations plus loin qu'on n'avait pu le faire jusque-là.

Si l'on réfléchit à la manière dont s'effectue l'intégration des équations différentielles par approximations successives, on reconnaît sans peine que les calculs se compliquent de plus en plus, et avec une grande rapidité, à mesure que l'on arrive à une approximation d'un ordre plus élevé. En négligeant d'abord complétement l'action perturbatrice du soleil, on trouve sans difficulté que la lune se meut autour de la terre conformément aux lois du mouvement elliptique. Les valeurs des coordonnées de la lune, dans ce mouvement elliptique, servent à effectuer une évaluation approchée des termes qui, dans les équations différentielles, représentent l'action perturbatrice précédemment négligée : dès lors on est en mesure de faire une première approximation du calcul des inégalités que cette action détermine dans le mouvement de la lune. Pour passer à une seconde approximation, on recommence l'évaluation des termes dus à l'action perturbatrice du soleil, en employant, non plus simplement les valeurs elliptiques des coordonnées de la lune, mais ces valeurs modifiées par la première approximation. De même les nouvelles valeurs que cette seconde approximation fournit pour les coordonnées de la lune servent à calculer les termes dus à l'action perturbatrice du soleil plus exactement qu'on n'avait pu le faire jusque-là, d'où résulte une troisième approximation des inégalités de la lune; et ainsi de suite. On comprend aisément par là comment, à chaque nouvelle approximation, les inégalités précédemment obtenues se combinent les unes avec les autres pour produire d'autres inégalités; et comment ces combinaisons conduisent bientôt à des calculs vraiment inextricables, ce qui em-

pêche de pousser les approximations aussi loin qu'on le désirerait, sans cesser de conserver une entière sécurité sur l'exactitude des résultats obtenus.

Cette méthode d'intégration est suffisante pour les théories du soleil et des planètes, où la première approximation donne presque tout ce que l'on cherche, et où l'on n'a besoin de recourir aux approximations suivantes que pour un petit nombre d'inégalités spéciales; mais il n'en est pas ainsi dans la théorie de la lune, ou, en raison de la grandeur de la force perturbatrice dont on veut calculer les effets, il est nécessaire d'effectuer complétement au moins quatre ou cinq des approximations qui viennent d'être indiquées, et où l'on doit d'ailleurs aller plus loin encore pour le calcul de quelques-unes des inégalités de la lune. Aussi n'y a-t-il pas lieu d'être surpris de ce que, malgré tous les soins apportés par MM. Plana et Hansen dans leurs calculs, les coefficients qu'ils ont obtenus pour les inégalités de la lune présentent des différences dont l'ensemble forme un total de plus de 50 secondes.

Pour vaincre la difficulté que présente l'intégration des équations différentielles du mouvement de la lune, je cherchai à l'attaquer par petites portions, et à remplacer ces quelques approximations successives qui se présentent avec un caractère de si grande complication, par un nombre beaucoup plus grand d'opérations distinctes dont chacune fût au contraire très-simple et pût être effectuée avec toute l'exactitude désirable sans que l'esprit cessât de pouvoir en embrasser très-facilement l'ensemble. Je fus assez heureux pour réussir, et je présentai à l'Académie, dans la séance du 16 novembre 1846, la méthode que j'avais imaginée pour atteindre ce but [*]. Encouragé par le Rapport favorable dont cette méthode fut bientôt l'objet de la part de mon illustre et vénéré maître M. Liouville (séance du 4 janvier 1847), je me mis résolûment à en faire l'application au calcul complet des inégalités lunaires, avec l'intention de pousser les approximations plus loin qu'on ne l'avait fait jusque-là. Pendant l'exécution de cette entreprise considérable, j'ai rencontré des entraves de plus d'un genre qui en ont momentanément retardé l'achèvement; mais je n'ai pas perdu

---

[*] Une première ébauche de cette méthode avait déjà été présentée à l'Académie dans sa séance du 5 janvier précédent.

courage, et je suis heureux de pouvoir venir annoncer aujourd'hui à l'Académie que mon travail est terminé.

Je vais rappeler en quelques mots en quoi consiste la méthode que j'ai suivie. D'après le beau Mémoire de Poisson de 1833, j'ai pris pour point de départ les équations différentielles fournies par la théorie de la variation des constantes arbitraires, et j'ai adopté un système d'éléments elliptiques tel, que ces équations aient la forme la plus simple dont elles soient susceptibles. La *fonction perturbatrice*, dont les dérivées partielles, relatives aux éléments elliptiques, fournissent précisément les valeurs des dérivées de ces mêmes éléments par rapport au temps, peut être facilement développée en une série de termes périodiques. Si l'on n'y prenait garde, l'introduction de cette série périodique dans les équations différentielles serait accompagnée d'un grave inconvénient : le temps sortirait des signes sinus ou cosinus, ce qui gênerait considérablement l'emploi de ces équations différentielles pour la détermination des inégalités lunaires. Je fais disparaître cet inconvénient par un moyen très-simple, qui diffère essentiellement de ceux employés avant moi pour atteindre le même but, et qui a le grand avantage de laisser aux équations différentielles la forme qu'elles avaient d'abord. Il résulte de là que le temps n'entre plus explicitement dans la fonction perturbatrice qu'autant qu'il y est introduit par les valeurs des coordonnées du soleil, et qu'en outre cette fonction renferme un terme non périodique indépendant de l'action perturbatrice de cet astre.

Cela étant fait, je supprime de la fonction perturbatrice la totalité des termes périodiques qu'elle renferme, à l'exception d'un seul que je choisis parmi ceux qui ont le plus d'influence pour produire des inégalités. En introduisant cette fonction ainsi simplifiée dans les équations différentielles, je trouve qu'elles s'intègrent complétement. Alors je profite de cette intégration pour en déduire des formules destinées à remplacer les six variables que j'avais par six autres de même nature. Ces formules de transformation s'obtiennent par une suite de déductions analytiques, dans le détail desquelles il m'est impossible d'entrer. Lorsque, par leur emploi, les nouvelles variables sont substituées aux anciennes dans la fonction perturbatrice et dans les expressions des coordonnées de la lune, il en résulte que : 1° un des termes importants

de la fonction perturbatrice disparaît (c'est le terme périodique que l'on avait conservé seul tout d'abord); 2° diverses inégalités correspondant à ce terme s'introduisent dans les valeurs des trois coordonnées de la lune. De plus, les valeurs des six nouvelles variables en fonction du temps sont déterminées par des équations différentielles exactement de même forme que celles qui déterminaient les valeurs des six variables auxquelles elles ont été substituées.

Dès lors, l'intégration des équations différentielles étant ramenée au même point que précédemment, sauf la disparition d'un terme périodique dans la fonction perturbatrice, une nouvelle opération analogue à celle qui vient d'être effectuée fait de même disparaître un autre terme de cette fonction; un troisième terme peut également lui être enlevé au moyen d'une troisième opération analogue, et ainsi de suite. De telle sorte qu'après que l'on a effectué successivement un nombre convenable d'opérations de ce genre, la fonction perturbatrice peut être débarrassée de ses termes les plus importants, et que la question peut être ainsi rendue assez simple pour pouvoir être traitée de la même manière que s'il s'agissait des perturbations d'une planète ou du soleil.

Telle est la méthode que j'ai suivie pour faire le calcul des perturbations du mouvement de la lune. Voici maintenant comment j'en ai fait l'application. Comme M. Plana, j'ai cherché les coefficients des inégalités sous leur forme analytique, en les développant suivant les puissances croissantes des petites quantités dont ils dépendent. Dans ces développements, on considère les excentricités des orbites de la lune et du soleil, l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique, et le rapport des moyens mouvements du soleil et de la lune, comme des quantités du premier ordre de petitesse; le rapport des moyennes distances de la lune et du soleil à la terre est une quantité du second ordre. M. Plana, par des calculs immenses qui lui ont demandé un temps considérable, a déterminé les valeurs des coefficients des inégalités lunaires jusqu'aux termes du cinquième ordre inclusivement; il n'a poussé plus loin le développement des coefficients que pour ceux où la lenteur de la convergence des séries lui a paru nécessiter la considération de quantités d'un ordre supérieur au cinquième. J'ai voulu, moi, aller jusqu'aux termes du septième ordre, sans en omettre aucun, sauf à pousser l'approximation plus loin encore, comme M. Plana, partout où j'en

reconnaîtrais la nécessité. Ceux qui ont quelque peu d'habitude des calculs de ce genre comprendront combien j'ai agrandi la tâche en ajoutant deux ordres de plus à ceux que M. Plana a considérés.

Pour atteindre ce but, j'ai appliqué la méthode indiquée ci-dessus de manière à faire disparaître successivement de la fonction perturbatrice les divers termes périodiques capables d'introduire, dans les valeurs des éléments de la lune, des inégalités d'un ordre inférieur au quatrième. J'ai dû pour cela effectuer cinquante-sept opérations destinées à enlever de cette fonction un même nombre de termes périodiques. Parmi ces cinquante-sept opérations, j'en pourrais citer un bon nombre qui m'ont demandé chacune plusieurs mois d'un travail assidu. Après les avoir terminées, j'ai pu sans peine et en peu de temps achever le calcul des inégalités lunaires, en déterminant celles que pouvaient encore produire les termes de la fonction perturbatrice qui ne lui avaient pas été enlevés.

Dans l'accomplissement de cette tâche énorme, pour laquelle je n'ai pu me faire aider par personne, je n'ai négligé aucun des moyens nombreux de vérification que la théorie m'avait indiqués. En outre, j'ai fait tous les calculs deux fois, sans aucune exception, en ayant soin de séparer chaque calcul de sa répétition, par un temps aussi long que possible, et par d'autres calculs tout différents, afin de rompre les habitudes de l'esprit, qui, sans cela, feraient facilement retomber dans une faute commise une première fois. J'ai fait, en un mot, tout ce qui dépendait de moi pour que mon travail se ressentît le moins possible des imperfections qui sont inhérentes aux œuvres de l'homme. Mon plus vif désir, en ce moment, c'est que l'Académie ne le trouve pas trop indigne de la grande confiance qu'elle m'a témoignée en m'en accordant à l'avance la récompense la plus haute à laquelle il soit possible d'aspirer.

(*Séance du* 24 *mai* 1858.)

Dans la dernière séance j'ai cherché à faire comprendre en quoi la méthode que j'ai suivie pour faire le calcul des inégalités lunaires diffère de celles qui ont été employées avant moi. Je me propose aujourd'hui d'entrer dans quelques détails sur la forme que j'ai adoptée pour les coefficients de ces inégalités.

Les valeurs de la longitude, de la latitude et de la parallaxe de la lune étant développées en séries de sinus ou de cosinus d'angles qui varient proportionnellement au temps, il est aisé de reconnaître que les coefficients de ces sinus ou cosinus dépendent des excentricités des orbites de la lune et du soleil, de l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique, du rapport des moyens mouvements des deux astres et du rapport de leurs moyennes distances à la terre. Quand on détermine ces coefficients, on peut les obtenir sous deux formes différentes, suivant que l'on suppose connues à priori les valeurs numériques des diverses quantités qui viennent d'être énumérées, ou bien qu'on introduise ces quantités dans le calcul en les représentant par leurs symboles algébriques. Dans le premier cas, les coefficients des inégalités se réduisent à de simples nombres; dans le second cas, ce sont des fonctions complexes des petites quantités dont ils dépendent, fonctions que l'on ne peut guère considérer que sous la forme de développements en séries ordonnées suivant les puissances croissantes, entières et positives, de ces petites quantités.

Ces deux formes différentes ont été adoptées l'une et l'autre par les savants qui ont effectué le calcul des inégalités de la lune. Damoiseau a pris la première, et M. Plana, au contraire, a choisi la seconde. Plus tard enfin M. Hansen a, comme Damoiseau, déterminé les coefficients des inégalités lunaires sous leur forme numérique.

M. Hansen, dans son ouvrage de 1838, intitulé : *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam luna perlustrat*, explique les motifs qui l'ont décidé à opérer ainsi. Il insiste particulièrement sur les graves inconvénients que présente le développement des coefficients en séries. Malgré ces critiques de la forme adoptée par M. Plana, critiques que je connaissais parfaitement lorsque j'ai commencé mon travail, je n'ai pas hésité un seul instant à suivre l'exemple du savant géomètre de Turin, et à chercher les expressions des inégalités de la lune sous leur forme analytique, en développant leurs coefficients en séries ordonnées suivant les puissances croissantes des excentricités de la lune et du soleil, de l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique, et des rapports des moyens mouvements des deux astres ainsi que de leurs moyennes distances à la terre.

L'autorité du nom de M. Hansen dans cette matière, l'importance

du travail qu'il a exécuté sur la théorie de la lune et d'où sont résultées des Tables lunaires meilleures que toutes les précédentes, enfin les éloges justement mérités dont ce travail a été récemment l'objet de la part du vénérable doyen de notre Académie, tout cela me fait un devoir d'expliquer les raisons d'après lesquelles je me trouve en divergence d'opinion avec l'illustre directeur de l'observatoire de Gotha.

Si les diverses quantités qui ont été indiquées précédemment, et dont dépendent les coefficients des inégalités de la lune, pouvaient être connues exactement à priori, on peut bien penser qu'il vaudrait mieux introduire tout de suite dans les calculs les valeurs numériques de ces quantités que de les conserver sous forme littérale jusqu'à la fin des calculs, pour ensuite leur attribuer ces mêmes valeurs numériques. Mais il n'en est pas réellement ainsi. Les éléments elliptiques du mouvement de la lune ne peuvent être déterminés que par la comparaison des formules qui donnent les coordonnées de la lune avec les observations; ces éléments auront donc telles ou telles valeurs, suivant qu'on regardera les coordonnées de la lune comme représentées par telles ou telles expressions. Quand on fait une nouvelle théorie de la lune, c'est avec le dessein de trouver pour ces coordonnées des expressions plus exactes que celles qui ont été antérieurement déterminées, soit qu'on parvienne à la connaissance d'inégalités inconnues jusque-là, soit qu'on corrige seulement les valeurs inexactes des coefficients de quelques-unes des inégalités connues; sans cela les recherches dont on s'occupe seraient sans objet. Dès lors on ne peut pas admettre à priori que l'on connaisse exactement les valeurs des éléments de la lune, puisque ces valeurs dépendent jusqu'à un certain point de ce que l'on cherche. Il est donc beaucoup plus naturel de laisser aux éléments dont dépendent les coefficients des inégalités leur forme purement littérale, pour ne leur attribuer des valeurs numériques que lorsqu'on aura pu déterminer ces valeurs par la comparaison des expressions obtenues pour les coordonnées avec les observations. Cette manière d'agir est beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit, et conduit évidemment à une solution plus complète de la question.

Pour opérer comme l'ont fait MM. Damoiseau et Hansen, c'est-à-dire pour employer immédiatement les valeurs numériques des éléments de la lune dans le calcul des inégalités de son mouvement, il faut supposer

que les valeurs qu'on attribue provisoirement à ces éléments ne seront que très-peu modifiées par la comparaison ultérieure des coordonnées de la lune avec les observations, et se réserver d'ailleurs la possibilité d'apporter aux coefficients des principales inégalités les corrections que pourraient nécessiter les différences entre les valeurs définitives des éléments et leurs valeurs provisoires employées dans les calculs.

Ces considérations suffisent, je crois, pour qu'on n'ait pas à hésiter à accorder la préférence aux développements analytiques sur les calculs numériques, dans la détermination des coefficients des inégalités de la lune; à moins toutefois qu'indépendamment de ce qui vient d'être dit, on n'ait des motifs graves pour faire le contraire. Ce sont des motifs de ce genre que M. Hansen met en avant dans son ouvrage, et d'après lesquels il adopte la recherche des inégalités sous forme numérique. Ces motifs sont de deux sortes : d'une part, M. Hansen considère la détermination des coefficients des inégalités sous la forme analytique comme presque inabordable par la longueur des calculs qu'elle entraînerait pour aller jusqu'à un degré d'approximation suffisant; d'une autre part, il attaque vivement les développements en séries comme pouvant souvent induire en erreur sur le degré d'approximation qu'ils fournissent, et comme ne pouvant jamais donner avec certitude des valeurs suffisamment exactes pour les inégalités que l'on cherche.

Il est bien vrai que le développement des inégalités sous forme analytique demande plus de temps que leur détermination sous forme numérique. Mais la différence ne m'a pas paru tellement grande, qu'il fallût absolument renoncer au premier mode de calcul pour se rabattre sur le second mode, et je n'ai pas pu partager l'opinion de M. Hansen quand il défiait, pour ainsi dire, MM. Lubbock et Poisson, qui donnaient la préférence aux développements analytiques, de faire exécuter complétement le calcul des inégalités lunaires par leurs méthodes respectives [*]. D'ailleurs l'expérience m'a prouvé que je ne m'étais pas

---

[*] Ut opera et labor, quem hæ methodi (il s'agit des méthodes de MM. Lubbock et Poisson) requirant, recte indicari possit, nihil est quod malim, quam ut hi geometræ integram perturbationum lunæ computationem secundum methodos propositas confici curent. (*Fundamenta nova*, etc., préface, page 8.)

trompé sous ce rapport. J'ai effectué le calcul des inégalités sous forme analytique, en poussant les approximations au moins aussi loin que M. Hansen ; et le temps total que j'y ai réellement consacré, et que je puis évaluer à environ six années, ne me paraît pas considérablement plus long que celui qu'il a dû employer lui-même pour obtenir ses expressions numériques des inégalités de la lune.

Le second reproche adressé par M. Hansen au développement des coefficients des inégalités sous forme de séries est plus grave que le premier ; et si ce reproche avait quelque fondement, on serait obligé d'admettre que le calcul direct des coefficients sous forme numérique est le seul dans lequel on puisse avoir confiance. Mais heureusement il n'en est rien. M. Hansen dit que le développement des coefficients des inégalités en séries de termes rangés par ordre de petitesse d'après le nombre des facteurs littéraux qui entrent dans chacun d'eux ne peut qu'induire en erreur [*] ; et qu'en effectuant ce développement avec le plus grand soin et la plus grande habileté, on n'est jamais certain d'avoir pris tous les termes dont la valeur n'est pas négligeable [**]. Il en donne comme exemple le coefficient trouvé par M. Plana pour l'inégalité de la longitude dont l'argument est le double de la distance du périgée de la lune à son nœud. Ce coefficient est

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{135}{64} m\right) e^2 \gamma^2.$$

e désigne l'excentricité de l'orbite de la lune, γ la tangente de son inclinaison sur l'écliptique, et m le rapport des moyens mouvements du soleil et de la lune. La quantité qui multiplie $e^2 \gamma^2$ dans ce coefficient est une fonction de m que M. Plana a supposée développée en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de m, et dont il a conservé les deux premiers termes seulement. Or, malgré la petitesse de m, qui est à peu près égal à $\frac{1}{13}$, le second de ces deux termes est

[*] Evolutio enim ut dicitur analytica semper dubia et fallax est..... (*Fundamenta nova*, etc., page 219.)

[**] ..... in evolutione tali, etiamsi summa cura industriaque maxima instituta sit, terminos omnes, qui vim habeant, receptos esse, quis pro certo affirmare potest? (*Fundamenta nova*, etc , préface, page 9.)

plus grand que le premier. Peut-on raisonnablement, d'après cela, croire que la série dont il s'agit soit convergente à ce point de pouvoir être remplacée par ses deux premiers termes, avec une exactitude suffisante? N'y a-t-il pas lieu de craindre au contraire que cette série soit divergente, ou bien au moins que quelques-uns des termes qui suivent les deux premiers ne soient aussi considérables que chacun de ceux-ci? L'objection est spécieuse; mais il ne me sera pas difficile d'y répondre.

Si, en calculant numériquement le coefficient de l'inégalité dont il s'agit, on obtenait ce coefficient tout d'un coup, par un seul calcul, on pourrait dire qu'on l'obtient plus exactement que M. Plana qui développe ce coefficient en série et ne garde que les deux premiers termes du développement. Mais ce n'est pas ainsi que les choses se passent. On est obligé de s'y reprendre à trois fois différentes pour calculer le coefficient dont il s'agit au même degré d'approximation que M. Plana. Une portion de ce coefficient se trouve déjà dans la valeur elliptique de la longitude de la lune; une seconde portion est fournie par la première des approximations successives qu'on effectue, celle qui donne les inégalités du premier ordre par rapport à la force perturbatrice; enfin une troisième portion du même coefficient résulte de la seconde approximation, celle qui donne les inégalités du second ordre par rapport à cette force [*]. Calculer ce même coefficient à trois reprises différentes, pour en obtenir une valeur de plus en plus appro-

---

[*] Partie qui se trouve dans la valeur elliptique de la longitude de la lune . . . . $-\frac{3}{16}$

Partie qui est du premier ordre par rapport à la force perturbatrice . . . . $+\frac{5}{16}-\frac{375}{256}m$

Partie qui est du second ordre par rapport à cette force . . . . . . $+\frac{945}{256}m$

Ces trois parties réunies donnent . . . . $+\frac{1}{8}+\frac{285}{128}m$

La petite quantité $\frac{15}{128}m$ qu'il faut retrancher de là pour avoir le coefficient de

chée, n'est-ce pas exactement la même chose que le supposer développé en série, et déterminer successivement chacun des trois premiers termes de la série, pour prendre la somme de ces trois termes au lieu de la valeur totale de la série? Or il arrive que ces trois premiers termes comparés entre eux indiquent encore moins de convergence, s'il est possible, pour la série à laquelle ils appartiennent, que les deux termes qui entrent dans la formule de M. Plana. La critique dirigée par M. Hansen contre la forme adoptée par M. Plana pour ses coefficients retombe donc complétement sur la manière dont lui-même a effectué le calcul des inégalités lunaires.

Ce peu de convergence, ou bien même, si l'on veut, cette divergence apparente qui se présente dans le développement analytique des coefficients des inégalités lunaires, tient à une circonstance particulière que je puis facilement indiquer et qui doit rendre à ce genre de développement toute la faveur que les critiques de M. Hansen tendraient à lui ôter. Chacun des coefficients dont il s'agit est la somme de plusieurs parties fournies par les approximations successives auxquelles on est obligé d'avoir recours. Chaque partie peut être développée en une série suffisamment convergente pour qu'on n'ait rien à craindre en la réduisant à quelques-uns de ses premiers termes; mais ces diverses séries, en s'ajoutant les unes aux autres, peuvent donner lieu à des apparences de divergence telles que celle que M. Hansen a signalée. Il peut arriver, par exemple, que deux séries que l'on ajoute commencent par des termes du même ordre de grandeur; que les premiers termes de chacune d'elles soient presque égaux entre eux et de signes différents, et que les seconds termes au contraire soient de même signe : le premier terme de la série résultant de l'addition des deux précédentes pourra être plus petit que le second, quoique celui-ci soit analytiquement d'un ordre de petitesse plus élevé que le premier. Il peut arriver encore que l'on ajoute deux séries, dont l'une ait des coefficients numé-

---

M. Plana, est d'un ordre supérieur au second, par rapport à la force perturbatrice.

En remplaçant m par $\frac{1}{13}$, on trouve que ces trois parties ont respectivement pour valeurs :

$$-0,187, \quad +0,200, \quad +0,284.$$

riques assez petits, tandis que l'autre a des coefficients beaucoup plus grands ; si le premier terme de la deuxième série doit par son ordre analytique se réduire avec le second terme de la première série, il s'ensuivra encore que le second terme de la série résultante pourra être plus grand que son premier terme. Ces deux circonstances se trouvent à peu près réunies dans le cas du coefficient que M. Hansen a pris pour exemple. Si M. Plana s'est contenté des deux premiers termes dans le développement de ce coefficient, c'est que bien certainement il a jugé qu'il pouvait s'en tenir là, et ne pas aller pour ce coefficient jusqu'aux termes du sixième ou du septième ordre comme il l'a fait dans d'autres cas.

Le défaut de convergence dans les premiers termes des coefficients de quelques inégalités développés en séries, qui est seulement masqué et qui n'en existe pas moins dans la détermination de ces coefficients sous forme numérique, paraît inévitable et doit être attribué à la nature même de la question. Dans l'exemple pris par M. Hansen, cela tient surtout à l'influence d'un terme remarquable de la fonction perturbatrice, terme dont l'argument est le double de la distance du soleil au périgée de la lune. Ce terme est précisément celui qui fait que la première approximation n'avait donné à Clairaut que la moitié du mouvement du périgée lunaire. C'est encore à ce terme qu'est due principalement l'inégalité connue sous le nom d'*évection*, inégalité que Newton n'avait pas pu expliquer par l'action perturbatrice du soleil, quoiqu'elle fût la plus considérable de celles qui sont dues à cette action.

D'après les explications dans lesquelles je viens d'entrer, les motifs mis en avant par M. Hansen pour rejeter la détermination des coefficients des inégalités lunaires sous forme de développements analytiques, me paraissent ne devoir pas être admis. Loin de moi la pensée d'avoir voulu atténuer en quoi que ce soit le mérite du travail de M. Hansen ; son travail est excellent, et contribuera puissamment à l'avancement de la science. On peut caractériser la marche qu'il a suivie en disant que c'est celle qui paraît exiger le moins de temps possible pour pousser les approximations aussi loin que le demandent les besoins de l'astronomie. Mon intention, en donnant les explications qui précèdent, a été uniquement de me soustraire à l'avance au reproche qu'on pour-

rait m'adresser d'avoir adopté un mode de développement depuis longtemps condamné par un savant aussi compétent que M. Hansen.

Un mot encore sur les avantages que présentent les développements analytiques des inégalités lunaires sous la forme que j'ai choisie d'après M. Plana. Les facteurs numériques qui entrent dans les divers termes de chacun de ces développements sont tous des fractions ordinaires dont la valeur s'obtient, non pas avec approximation, mais rigoureusement. Quelle que soit la méthode que l'on emploie pour obtenir les développements dont il s'agit, on doit trouver une identité complète, absolue, entre les diverses déterminations de chacun de ces facteurs numériques. On comprend tout l'avantage qui en résulte pour la comparaison des valeurs trouvées par diverses personnes pour le coefficient d'une même inégalité. Les différentes valeurs obtenues pour ce coefficient doivent être identiquement les mêmes, terme à terme; et, s'il y a une différence pour l'un des termes, on est bien plus facilement mis sur la voie de l'erreur qu'on doit rechercher que si l'on n'avait pu comparer que les valeurs numériques et approchées du coefficient tout entier.

Lorsque les termes des ordres les moins élevés dans les développements des coefficients des inégalités auront été ainsi complétement fixés dans leurs valeurs rigoureuses, comme M. Lubbock l'a déjà fait pour une partie des termes obtenus par M. Plana, on pourra s'appuyer sur cette base parfaitement stable, pour pousser la même exactitude dans les termes des ordres suivants, jusqu'à ce qu'on soit certain d'avoir les valeurs exactes de tous ceux qui peuvent avoir une influence appréciable; et s'il ne suffisait pas de s'arrêter aux termes du septième ordre, on pourrait chercher les termes des ordres plus élevés en appliquant la méthode que j'ai suivie pour aller jusqu'aux termes du septième ordre. Les opérations successives et distinctes que j'ai eu à exécuter pour cela sont encore très-loin de présenter individuellement un tel degré de complication, qu'on ne puisse pas les refaire, en s'appuyant sur ce qui est déjà fait, de manière à pousser notablement plus loin les développements analytiques des inégalités de la lune.

NOUVELLE MÉTHODE

POUR

DÉMONTRER L'EXISTENCE DU SYSTÈME CONJUGUÉ RECTANGULAIRE

DANS

LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. E. BRASSINNE [*].

La méthode suivante, qu'il suffira d'appliquer à l'ellipsoïde, suppose la solution de ce problème : *Trouver les conditions auxquelles sont assujettis les axes d'une ellipse, pour qu'elle puisse être placée sur un ellipsoïde donné, dans une section passant par son centre.*

1. Sans autre calcul que la résolution d'une équation du second degré, on démontre aisément que l'équation générale des surfaces du second ordre se ramène dans un système de coordonnées obliques aux deux formes

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1, \quad P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

On prouve d'ailleurs immédiatement par un procédé dû à J. Binet que, pour tous ces systèmes, la somme des carrés des demi-diamètres conjugués est constante, ainsi que le volume du parallélipipède construit sur leurs longueurs; on peut ajouter que la somme des carrés des aires des parallélogrammes conjugués restera invariable. Si l'on considère, par exemple, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

---

[*] Cette Note complètera un article inséré il y a déjà longtemps dans le *Journal de Mathématiques;* c'est ce qui m'a décidé à venir parler encore d'une question assez élémentaire, qui, je le reconnais, ne peut guère avoir aujourd'hui de l'intérêt que pour les professeurs. La solution que je donne n'a d'ailleurs rien de commun avec celle de Petit, qui est entrée depuis longtemps dans les ouvrages didactiques.

(E. BRASSINNE.)

le plan zx pourra être supposé perpendiculaire à celui des xy, puisqu'on peut placer à volonté dans ce dernier plan le diamètre a'. Cela posé, si l'on appelle θ, θ', θ'' les angles xy, xz, yz, et si pour un nouveau système conjugué, qui aurait le même diamètre c' sur des z et les diamètres a'', b'' sur le plan xy, on désigne par λ, λ', λ'' les angles analogues, on aura

$$\begin{aligned} &a'^2 b'^2 \sin^2\theta + a'^2 c'^2 \sin^2\theta' + b'^2 c'^2 \sin^2\theta'' \\ &= a''^2 b''^2 \sin^2\lambda + a''^2 c'^2 \sin^2\lambda' + b''^2 c'^2 \sin^2\lambda''; \end{aligned}$$

car si l'on tient compte des relations

$$\cos\theta'' = \cos\theta\cos\theta', \qquad \cos\lambda'' = \cos(\alpha+\lambda)\cos\theta',$$
$$\cos\lambda' = \cos\alpha\cos\theta', \quad a'b'\sin\theta = a''b''\sin\lambda,$$

dans lesquelles α est l'angle du demi-diamètre a'' avec a', on trouve aisément

$$a'^2 + b'^2\cos^2\theta = a''^2\cos^2\alpha + b''^2\cos^2(\alpha+\lambda)$$

qui n'est qu'un cas particulier de ce théorème :

La somme des carrés des projections des diamètres conjugués d'une ellipse sur une droite donnée est constante.

On passe ensuite au théorème général que nous avons en vue, en plaçant, comme le fait J. Binet, la diamètre a'' sur l'intersection du plan xy avec un nouveau plan $x'y'$ relatif à un second système conjugué (Leroy, *Analyse aux trois dimensions*, ch. XI).

2. Considérons dans un système rectangulaire l'ellipsoïde

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 1,$$

que nous couperons par un plan passant par son centre. Si θ est l'inclinaison de ce plan sur les xy, φ l'angle de la trace sur ce plan avec la ligne des x, l'équation de la section sera

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &x'^2(P\cos^2\varphi + P'\sin^2\varphi) \\ &+ y'^2(P\cos^2\theta\sin^2\varphi + P'\cos^2\theta\cos^2\varphi + P''\sin^2\theta) \\ &+ 2x'y'\cos\theta.\cos\varphi.\sin\varphi(P'-P) = 1, \end{aligned} \right.$$

x' coïncide avec la trace du plan de section, et y' est situé perpendiculairement dans ce plan.

Comparons cette section avec une ellipse dont les demi-axes seront $\frac{1}{\sqrt{M}}$, $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et dont l'équation en système rectangulaire sera

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} x'^2(M\cos^2\omega + N\sin^2\omega) + y'^2(M\sin^2\omega + N\cos^2\omega) \\ + 2x'y'\sin\omega\cos\omega(N - M) = 1. \end{array} \right.$$

Si M, N sont donnés, cette équation renfermera une quantité non déterminée ω. Posons

$$u = M\cos^2\omega + N\sin^2\omega,$$

d'après laquelle u aura pour limites supérieure et inférieure M et N en supposant $M > N$. L'équation (2) prendra la forme

$$(3)\quad ux'^2 + (M + N - u)y'^2 + 2x'y'\sqrt{(M - n)(N - u)} = 1;$$

cette derniere identifiée à l'équation (1) donnera

$$\cos^2\theta = \frac{M + N - P'' - U}{P + P' - P'' - u}, \quad \cos^2\varphi = \frac{u - P'}{P - P'}, \quad \sin^2\varphi = \frac{P - u}{P - P'}.$$

$$(4)\quad \frac{(M + N - P'' - u)}{P + P' + P'' - u}(u - P')(P - u) + (u - M)(u - N) = 0.$$

Ces relations prouvent que l'ellipse (2) ne peut être identifiée à la section que si

$$M + N < P + P', \quad u > P', \quad u < P$$

en supposant

$$P > P' > P''.$$

On peut d'abord satisfaire à ces conditions en prenant

$$N > P'', \quad N < P', \quad M > P', \quad M < P.$$

Dans cette hypothèse, la relation (4) (qui se réduit au premier degré) a sa racine comprise entre P′ et M puisqu'elle change de signe en posant

$$u = P' \quad \text{et} \quad u = M;$$

par suite ω aura une valeur réelle, et le problème sera susceptible de deux solutions. Si l'on supposait

$$N > P', \quad M < P,$$

la valeur unique de u fournie par l'équation (4) ne serait pas comprise entre M et N, puisque la substitution de ces nombres à la place de u donne des résultats de même signe; par suite ω serait imaginaire et le problème impossible. Ces considérations démontrent aussi que dans le cas des sections circulaires M et N doivent égaler P'. En exprimant P, P', P'' au moyen des axes rectangulaires, on verra que l'ellipse pour pouvoir être une section centrale de l'ellipsoïde doit avoir son petit axe et son grand axe plus petit et plus grand que le moyen axe rectangulaire de l'ellipsoïde.

3. Supposons l'équation d'un ellipsoïde donnée dans un système conjugué oblique :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

On peut admettre que a', b' forment dans le plan xy un système conjugué rectangulaire. Cela supposé, prenons trois quantités a^2, b^2, c^2 pour inconnues et posons les trois relations

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= a'^2 + b'^2 + c'^2 = L, \\ a^2 b^2 c^2 &= a'^2 b'^2 c'^2 (1 - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'') = K, \\ a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 &= a'^2 b'^2 + a'^2 c'^2 \sin^2\theta' + b'^2 c'^2 \sin^2\theta'' = G. \end{aligned} \right.$$

On pourra regarder a^2, b^2, c^2 comme les trois racines de

$$(6)\qquad t^3 - Lt^2 + Gt - K = 0.$$

Or ces racines sont réelles et positives. Supposons en effet

$$a' > b' > c' \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

la relation (6) donnera un résultat négatif $-K$ ($\sqrt{K}$ exprime le volume du parallélipipède oblique qui a pour arêtes a', b', c'); pour $t = b'^2$, on aura un résultat positif; pour $t = a'^2$, un résultat négatif et pour $t = \infty$ un résultat positif. Il existe donc trois valeurs positives a, b,

c qui satisfont aux relations (5) et qui sont telles que $a > a'$, $c < c'$.

Si nous concevons un ellipsoïde à axes rectangulaires a, b, c, nous pourrons faire par son centre une section qui donne par son intersection avec la surface une ellipse dont les axes seront a', b'. La droite des centres de toutes les sections parallèles donnera le diamètre conjugué de a', b', lequel, d'après la première relation (5), qui existe pour l'ellipsoïde à axes rectangulaires, sera égal à c'. Les deux dernières relations (5) qui ont lieu entre les axes a, b, c et les diamètres a', b', c' montrent que les angles de ces diamètres sont nécessairement $90°$, θ', θ''. Le système conjugué a', b', c' de l'ellipsoïde oblique est donc aussi un système conjugué d'un ellipsoïde à axes rectangulaires a, b, c. Il résulte de là que ces deux ellipsoïdes se confondent. Donc le système conjugué oblique quel qu'il soit suppose un système conjugué rectangulaire, ce à quoi nous parvenons sans employer la méthode de Petit.

Les surfaces privées de centre ne présentent aucune difficulté.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

QUATRIÈME ARTICLE.

Considérons à présent un nombre entier quelconque, pair ou impair. Un tel nombre pourra être représenté par

$$2^{\alpha} m,$$

m étant un entier impair, à la condition, bien entendu, que l'exposant α puisse être réduit à zéro. Décomposons $2^{\alpha} m$ en deux parties entières positives, que nous n'assujettirons du reste à aucune condition, et que nous pourrons représenter respectivement par

$$2^{\alpha'} m', \quad 2^{\alpha''} m'',$$

en admettant cette fois encore que l'exposant de 2 sera réduit à zéro quand il s'agira d'un nombre impair. En d'autres termes, posons

$$2^{\alpha} m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

et regardant comme donné le premier membre, où le facteur m est impair, et où l'exposant α est un des nombres de la série $0, 1, 2, 3, \ldots$, disposons des exposants α', α'' et des facteurs impairs m', m'' de manière à avoir successivement

$$2^{\alpha'} m' = 1, \quad 2^{\alpha'} m' = 2, \quad 2^{\alpha'} m' = 3, \ldots, \quad 2^{\alpha'} m' = 2^{\alpha} m - 1,$$

et, en même temps, terme à terme,

$$2^{\alpha''} m'' = 2^{\alpha} m - 1, \quad 2^{\alpha''} m'' = 2^{\alpha} m - 2, \ldots, \quad 2^{\alpha''} m'' = 1.$$

Désignons par d un quelconque des diviseurs de m, et par δ le diviseur complémentaire qui donne

$$m = d\delta.$$

Soit de même

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

d' étant un quelconque des diviseurs de m', et d'' un quelconque des diviseurs de m''. Et ces préliminaires admis, considérons la somme triple

$$S = \sum \left\{ \sum\sum [f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'') - f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'')] \right\},$$

où les deux premières sommations concernent les diviseurs d', d'' qui se rapportent à un quelconque des groupes m', m'' dont nous venons de parler, et pour lesquels on a $2^\alpha m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m''$, tandis que le troisième $\sum$ indique qu'on fait le total des sommes partielles relatives à ces groupes. Quant à la fonction $f(x)$, on suppose que

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x qu'on devra employer; du reste, cette fonction f est à volonté.

La somme complète S s'exprimera très-simplement au moyen des diviseurs d de m. Je trouve, en effet, que

$$S = \sum (\delta - 2^\alpha d)[f(2^\alpha d) - f(0)],$$

le signe $\sum$ portant sur les diviseurs d, dont chacun est accompagné du diviseur δ complémentaire.

Ainsi on a la formule

$$(G) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \left\{ \sum\sum [f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'') - f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'')] \right\} \\ & = \sum (\delta - 2^\alpha d)[f(2^\alpha d) - f(0)], \end{aligned} \right.$$

sur laquelle nous allons nous arrêter quelques instants.

Supposons d'abord que l'on ait $\alpha = 0$, de sorte que $2^\alpha m$ se réduise au nombre impair m. Il est clair que pour que l'on ait

$$m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

il faudra qu'un des exposants α', α'' soit zéro, et comme on peut échanger entre eux les deux termes du second membre, on aura le droit de supposer que c'est toujours le premier de ces exposants qui est nul, pourvu qu'on double le premier membre de la formule (G). Ainsi, désormais on fera

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

et la formule (G) se changera en celle-ci :

$$2\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')\right]\right\}$$
$$= \sum(\delta - d)\left[f(d) - f(0)\right].$$

Mais le second membre peut être simplifié, car on peut le regarder comme composé de deux parties, savoir :

$$\sum(\delta - d) f(d)$$

et

$$f(0)\sum(\delta - d);$$

or cette dernière est nulle, car on a évidemment

$$\sum \delta = \sum d.$$

Nous sommes donc conduits à cette formule définitive

$$2\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')\right]\right\} = \sum(\delta - d) f(d),$$

qui n'est autre que la formule (F) de notre troisième article.

Maintenant prenons $\alpha > 0$ et appliquons la formule (G) à quelques exemples.

Soit, en premier lieu,

$$f(x) = x^2;$$

il nous viendra

$$\sum \left(2^{\alpha'} 2^{\alpha''} \sum \sum d' d''\right) = 2^{2\alpha - 2} \sum (2^\alpha d - \delta) d^2.$$

Désignons, à notre ordinaire, par $\zeta_\mu(m)$ la somme des puissances de degré μ des diviseurs de m. Nous aurons

$$\sum \sum d' d'' = \zeta_1(m') \zeta_1(m''),$$

en sorte que le premier membre de l'équation précédente s'écrira :

$$\sum \left[2^{\alpha' + \alpha''} \zeta_1(m') \zeta_1(m'')\right].$$

Quant au second membre, il est aisé de le mettre sous la forme

$$2^{3\alpha - 2} \zeta_3(m) - 2^{2\alpha - 2} m \zeta_1(m).$$

Ainsi, on a

$$\sum \left[2^{\alpha' + \alpha''} \zeta_1(m') \zeta_1(m'')\right] = 2^{3\alpha - 2} \zeta_3(m) - 2^{2\alpha - 2} m \zeta_1(m).$$

Soit, en second lieu,

$$f(x) = x^4.$$

Nous obtiendrons

$$\sum \left[2^{3\alpha' + \alpha''} \zeta_3(m') \zeta_1(m'')\right] = 2^{5\alpha - 4} \zeta_5(m) - 2^{4\alpha - 4} m \zeta_3(m)$$

Soit, enfin,

$$f(x) = \cos xt,$$

t étant une constante arbitraire; il nous viendra

$$\sum \left[\sum \sin(2^{\alpha'} d' t) \sum \sin(2^{\alpha''} d'' t)\right] = \sum (2^\alpha d - \delta) \sin^2(2^{\alpha - 1} dt).$$

Il est assez curieux de rapprocher ces résultats, et en général tous les résultats que donne la formule (G) en y prenant $\alpha > 0$, des résultats analogues que nous avons obtenus dans notre second article en

considérant un nombre pair $2^\alpha m$, mais en le décomposant alors en une somme $m'+m''$ de deux entiers impairs, tandis qu'ici nous posons

$$2^\alpha m = 2^{\alpha'} m' + 2^{\alpha''} m'',$$

ajoutant ainsi les décompositions en deux nombres pairs (zéro exclu) aux décompositions en deux nombres impairs, qui d'abord avaient été seules admises.

Nous allons maintenant donner une autre formule applicable aussi à un nombre quelconque, décomposé comme ci-dessus en deux parties entières positives; mais dans cette nouvelle formule, essentiellement différente de la formule (G), nous ne ferons aucune attention aux facteurs exprimés par des puissances de 2 qui tout à l'heure étaient mis en évidence. Ainsi nous désignerons par m un nombre entier donné quelconque, pair ou impair, mais > 1, et par m', m'' deux entiers positifs dont la somme fasse m. Nous aurons ainsi

$$m = m' + m'',$$

m' prenant successivement les valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-2,\ m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires

$$m-1,\ m-2\ \ldots,\ 2,\ 1.$$

Soit d'ailleurs d un diviseur quelconque de m, et δ le diviseur complémentaire qui donne

$$m = d\delta;$$

et faisons de même

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta''.$$

Cela posé, je considère la somme triple

$$S = \sum \left\{ \sum \sum [f(d'-d'') - f(d'+d'')] \right\},$$

où les deux premières sommations portent sur les diviseurs d', d'' de deux quelconques des nombres entiers positifs m', m'' qui forment un groupe vérifiant la condition $m = m' + m''$ indiquée plus haut. Le

troisième $\sum$ nous apprend qu'on doit faire le total de ces sommes partielles pour tous les groupes. La fonction $f(x)$ est arbitraire, mais telle, pourtant, que

$$f(-x) = f(x).$$

Il s'agit d'exprimer, au moyen des seuls diviseurs d du nombre m, la somme complète S obtenue comme nous venons de l'expliquer.

Or, je trouve pour S une valeur que j'écris de cette manière :

$$S = [\zeta_1(m) - \zeta(m)]f(0) - \sum f(d)[2\zeta(\delta) + d - 2\delta - 1]$$
$$- 2\sum{}' [f(2) + f(3) + f(4) \ldots + f(d-1)];$$

mais il faut expliquer le sens précis des notations que j'introduis dans cette circonstance.

Dans le premier terme

$$[\zeta_1(m) - \zeta(m)]f(0),$$

on ne trouve que nos signes habituels : $\zeta_1(m)$ est la somme des diviseurs de m, $\zeta(m)$ le nombre de ces diviseurs.

De même, au second terme, $\zeta(\delta)$ est le nombre des diviseurs de δ, et la somme

$$\sum f(d)[2\zeta(\delta) + d - 2\delta - 1]$$

est relative à tous les groupes d, δ de diviseurs conjugués du nombre $m = d\delta$.

Mais dans le troisième terme le signe $\sum$ est marqué d'un accent qui en modifie la signification. Cet accent indique pour nous que dans la somme

$$f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(d-1),$$

prise pour chaque diviseur d, on doit omettre les termes où le nombre placé sous le signe f serait un diviseur de d. Ainsi cette somme est nulle pour $d = 1$ et pour $d = 2$, puisque l'on n'a alors aucun terme à prendre. Pour $d = 3$ elle est égale à $f(2)$; pour $d = 4$ à $f(3)$,

puisque 2 divise 4; pour $d = 5$ à $f(2)+f(3)+f(4)$; pour $d = 6$ elle se réduit à $f(4)+f(5)$, parce que 2 et 3 divisant 6 on doit omettre $f(2)$ et $f(3)$; et ainsi de suite.

Ceci bien compris, nous avons donc l'équation singulière

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}\\ &=[\zeta_1(m)-\zeta(m)]f(0)-\sum f(d)[2\zeta(\delta)+d-2\delta-1]\\ &-2\sum{}'[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1)]. \end{aligned}\right.$$

On pourrait, et cette remarque s'applique aussi aux formules qui précèdent, on pourrait, dis-je, en restant dans les mêmes conditions pour m, m' et m'', donner une formule plus générale; mais la formule (H) est déjà assez curieuse. Nos premiers articles suffiront pour faire deviner au lecteur intelligent que l'on peut y introduire une fonction arbitraire de deux variables. Nous opérerons plus tard cette extension. Tenons-nous-en, pour le moment, à la formule (H), et faisons-en l'application à des exemples simples.

Admettons que m soit un nombre premier. Alors d et δ n'auront que ces deux valeurs conjuguées $d = 1$, $\delta = m$ et $d = m$, $\delta = 1$. On aura

$$\zeta_1(m) = m+1, \quad \zeta(m) = 2;$$

la somme

$$\sum{}'[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1)]$$

se réduira d'ailleurs à

$$f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(m-1).$$

La formule (H) nous donnera donc pour ce cas :

$$\begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}\\ &=(m-1)[f(0)-f(m)]+(2m-4)f(1)\\ &-2[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(m-1)]. \end{aligned}$$

Particularisons en outre la fonction f et prenons

$$f(x) = x^2;$$

il nous viendra, en changeant les signes,

$$4\sum\left(\sum\sum d'd''\right)$$

$$= (m-1)m^2 - 2m + 4 + 2[2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (m-1)^2].$$

On a

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (m-1)^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} - 1.$$

en sorte que le second membre est égal à

$$\frac{(m^2-1)(5m-6)}{3}.$$

Quant au premier membre, il peut s'écrire

$$4\sum\zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

m', m'' étant les couples de nombres entiers positifs dont le nombre premier m est la somme. J'en conclus que

$$\sum\zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{(m^2-1)(5m-6)}{12}.$$

Par exemple, le nombre premier 5 est susceptible des quatre décompositions

$$1+4, \quad 2+3, \quad 3+2, \quad 4+1,$$

de façon que pour lui

$$\sum\zeta_1(m')\zeta_1(m'') = 2[\zeta_1(1)\zeta_1(4) + \zeta_1(2)\zeta_1(3)] = 38,$$

et l'on peut s'assurer qu'en effet

$$\frac{(5^2-1)(5.5-6)}{12} = 38.$$

Observons, en passant, que l'équation

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'') = \frac{(m^2-1)(5m-6)}{12}$$

est une de celles qui, appliquées à un nombre premier $16k+7$, peuvent servir à démontrer un théorème de M. Bouniakowsky dont nous avons parlé plusieurs fois déjà, à savoir que tout nombre premier m de l'espèce indiquée peut se décomposer (un nombre impair de fois) sous la forme

$$2x^2 + p^{4l+1}.y^2,$$

p étant un nombre premier $8\mu+5$, qui ne divise pas y.

En effet, si dans la somme

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

on groupe entre eux les termes à égale distance des extrêmes, on aura

$$\zeta_1(1)\zeta_1(m-1) + \zeta_1(2)\zeta_1(m-2) + \ldots + \zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)\zeta_1\left(\frac{m+1}{2}\right)$$
$$= \frac{(m^2-1)(5m-6)}{24}.$$

Il est aisé de voir que m étant de la forme $16k+7$, le second membre de l'équation que je viens d'écrire est de la forme $4s+2$. Cela posé, appliquons au premier membre le lemme concernant la fonction ζ_1 sur lequel M. Bouniakowsky s'appuie, et dont nous avons rappelé l'énoncé et la démonstration à la page 84 du présent volume. Nous en conclurons d'abord que les termes qui composent ce premier membre sont tous pairs, car si quelque produit

$$\zeta_1(m')\zeta_1(m'')$$

était impair, chacun des nombres correspondants m', m'' (dont m est la somme) devrait être un carré ou le double d'un carré, et cela est évidemment impossible, m étant de la forme $16k+7$. D'un autre côté, ces produits

$$\zeta_1(m')\zeta_1(m'')$$

ne peuvent pas être tous divisibles par 4, puisque le second membre $4s + 2$ n'est pas divisible par 4. Il y a donc, dans la suite

$$\zeta_1(1)\zeta_1(m-1),\quad \zeta_1(2)\zeta_1(m-2),\ldots,\quad \zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)\zeta_1\left(\frac{m+1}{2}\right),$$

au moins un nombre simplement pair, et si l'on en rencontre plusieurs de cette espèce, ce sera un nombre impair de fois. De là, par un nouvel emploi du lemme, on conclut que m est une fois, ou un nombre impair de fois, de l'une des deux formes

$$2x^2 + p^{4l+1}.y^2,\quad x^2 + 2p^{4l+1}.y^2,$$

p désignant un nombre premier $4\lambda + 1$ qui ne divise pas y. Or, si nous ajoutons que la seconde de ces deux formes ne peut jamais fournir le nombre $16k + 7$, et que la première ne peut le produire qu'en prenant $\lambda = 2\mu + 1$, c'est-à-dire $p = 8\mu + 5$, ainsi qu'on s'en assurera en cherchant l'expression des restes pour le module 8, il ne restera plus que la forme citée dans l'énoncé du théorème de M. Bouniakowsky : ce théorème est donc démontré.

La formule

$$\begin{aligned}\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}\\ =(m-1)[f(0)-f(m)]+(2m-4)f(1)\\ -2[f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(m-1)]\end{aligned}$$

donne encore un résultat assez intéressant quand on y pose

$$f(x) = \cos xt,$$

t étant une constante arbitraire. Mais nous ne voulons pas pousser ici plus loin ces détails.

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME SUR LES ONDES PERMANENTES;

PAR M. A. POPOFF,

Professeur à l'Université de Kazan.

I.

Problème. Supposons qu'un courant invariable de liquide homogène dont la largeur et la profondeur sont indéterminées ou comme infinies, supporte à sa surface une pression appliquée à une bande transversale de cette surface et propre à produire un sillon uniforme à travers tout le courant: proposons-nous de déterminer la forme et les dimensions des ondes permanentes qui paraîtront à la surface de ce courant. Le liquide sera supposé incompressible et assujetti à la seule action de la pesanteur.

Solution. Il est évident que le mouvement du liquide sera identique dans tous les plans verticaux et parallèles à la direction générale du courant; par conséquent on peut se borner à considérer un filet du courant dans une section verticale, que l'on prendra pour plan des coordonnées. A proprement parler ce sera une couche de liquide comprise entre deux plans parallèles et infiniment rapprochés.

Soient x, y les deux coordonnées rectangulaires d'un point dans ce plan, où une molécule quelconque du liquide sera amenée par le mouvement au bout du temps t; p la pression qui a lieu au même point; $k+\varphi$ et v les vitesses de la molécule suivant les axes des coordonnées x, y (k étant la vitesse du courant); g l'intensité de la pesanteur qui est supposée agir dans le sens des y positives; soit enfin ρ la densité constante du fluide. En supposant que la masse du liquide reste continue pendant le mouvement, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx}+\frac{dv}{dy}=0.$$

Les deux équations du mouvement d'un élément $dxdy$ se réduisent à

une seule

$$g\rho y - p = \frac{1}{2}\rho\left[(k + \varphi)^2 + \nu^2\right] + \mathrm{C},$$

en désignant par C une constante arbitraire.

Supposons de plus que les quantités φ et ν ne dépassent jamais des valeurs très-petites. Il nous semble que cette hypothèse n'est qu'une conséquence naturelle de l'équation de continuité à la surface des ondes; mais comme cette notion demanderait quelques développements, nous la présentons comme une hypothèse. En négligeant donc les produits et les puissances supérieures à la première par rapport à ces quantités, on réduit l'équation précédente à celle-ci

$$g\rho y - p = \frac{1}{2}\rho\,(k^2 + 2k\varphi) + \mathrm{C},$$

et quand cette équation se rapporte à la surface des ondes, on doit faire $y = 0$ dans les fonctions φ et ν.

Si l'on différentie l'équation précédente par rapport à t et aux autres quantités qui varient avec t, en ayant égard aux conditions de notre approximation, on aura pour la surface des ondes

$$(2) \qquad g\nu = k^2\frac{d\varphi}{dx} + \frac{k}{\rho}\frac{dp}{dx},$$

où la valeur de p est donnée par l'équation

$$p = \rho f(x) + \mathrm{H};$$

et la fonction arbitraire $f(x)$ n'est différente de zéro que de $x > -l$ à $x < l$, la constante H représentant la pression extérieure sur tout le reste de la surface libre. Pour des valeurs de x très-grandes par rapport à l, on aura

$$p = \mathrm{H}, \quad y = 0, \quad \varphi = 0, \quad \nu = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\rho k^2 + \mathrm{H} + \mathrm{C} = 0,$$

ce qui réduit l'équation de la partie de la surface assujettie à la pres-

sion constante H à la suivante :

$$(3) \qquad gy = k\varphi,$$

en supposant toujours dans le second membre de cette équation $x > l$ ou $x < -l$, $y = 0$. Il est presque superflu d'ajouter que les fonctions φ et v s'évanouissent pour des valeurs très-grandes de y, quelle que soit la valeur de x.

On satisfait aux équations (1), (2) et aux autres conditions du problème en posant

$$(4) \qquad \varphi = \frac{d\Omega}{dx}, \quad v = \frac{d\Omega}{dy},$$

$$\Omega = \frac{k}{\pi}\int\int f(\alpha)\, e^{-\mu y} \sin\mu\,(x-\alpha)\,\frac{d\mu\, d\alpha}{g - k^2\mu},$$

et observant que la fonction $f(x)$ peut être représentée par l'intégrale définie

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\int f(\alpha)\cos\mu\,(x-\alpha)\,d\mu\,d\alpha,$$

où l'intégration s'étend de $\mu = 0$ à $\mu = \infty$, et depuis $\alpha = -l$ jusqu'à $\alpha = l$; la lettre π désignant, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre.

II.

Pour la surface libre des ondes, où l'on devra faire $y = 0$, l'intégrale Ω se prête aux réductions nécessaires pour l'application au phénomène physique. Prenons pour cela l'équation identique

$$\int_0^\infty e^{-\mu y} \sin a\mu\,\frac{d\mu}{1-\mu}$$

$$= \int_0^1 e^{-\mu y} \sin a\mu\,\frac{d\mu}{1-\mu} - e^{-y}\int_0^\infty e^{-sy}\sin a(1+s)\frac{ds}{s}.$$

a et y étant des constantes. En supposant $y = 0$ dans le second membre de l'équation, il deviendra

$$\int_0^1 \sin a(1-s)\frac{ds}{s} - \int_0^\infty \sin a(1+s)\frac{ds}{s},$$

ou, ce qui revient au même,

$$-2\cos a\int_0^\infty \sin as\frac{ds}{s}+\int_1^\infty \sin a(s-1)\frac{ds}{s},$$

et définitivement

$$-\pi\cos a+\int_0^\infty \frac{\sin au\,du}{1+u}.$$

La valeur de cette dernière intégrale s'exprime sous des formes très-différentes selon la valeur numérique de a. Pour des valeurs très-grandes de a, et par l'intégration par parties on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin au\,du}{1+u}=\frac{1}{a}-\frac{2}{a^3}+\frac{2.3.4}{a^5}-\frac{2.3.4.5.6}{a^7}+\ldots.$$

En s'arrêtant aux deux premiers termes de cette série, on trouve

$$\int_0^\infty \sin a\mu\frac{d\mu}{1-\mu}=-\pi\cos a+\frac{1}{a}-\frac{2}{a^3},$$

et si l'on substitue $\frac{k^2\mu}{g}$ à la place de μ, et qu'on suppose $a=\frac{g(x-\alpha)}{k^2}$, il en resultera

$$\int_0^\infty \sin\mu(x-\alpha)\frac{d\mu}{g-k^2\mu}=-\frac{\pi}{k^2}\cos\frac{g(x-\alpha)}{k^2}+\frac{1}{g(x-\alpha)}-\frac{2k^4}{g^3(x-\alpha)^3}+\ldots.$$

Le dernier terme de cette équation peut être aussi négligé, attendu que les valeurs de k ne doivent pas dépasser les limites assignées à cette constante, dans le cas de notre problème, par la condition de continuité à la surface du liquide. En mettant cette valeur dans l'expression de la fonction Ω, pour $y=0$, on aura

$$\Omega=-\frac{1}{k}\int f(\alpha)\cos\frac{g(x-\alpha)}{k^2}d\alpha+\frac{k}{\pi g}\int f(\alpha)\frac{d\alpha}{x-\alpha},$$

et l'équation (3) pour la surface des ondes deviendra

$$y=\frac{1}{k^2}\int f(\alpha)\sin\frac{g(x-\alpha)}{k^2}d\alpha-\frac{k^2}{\pi g^2}\int f(\alpha)\frac{d\alpha}{(x-\alpha)^2}.$$

Puisque la fonction $f(x)$ est supposée positive pour toutes les valeurs de la variable x, on peut admettre

$$\int f(\alpha) \cos \frac{g\alpha}{k^2} d\alpha = \cos \theta \int f(\alpha) d\alpha,$$

$$\int f(\alpha) \sin \frac{g\alpha}{k^2} d\alpha = \sin \theta \int f(\alpha) d\alpha,$$

θ étant une constante dont la valeur se déterminera d'après la valeur donnée de $f(\alpha)$. En même temps on peut faire par approximation pour des valeurs de x qui surpassent beaucoup celle de l,

$$\int f(\alpha) \frac{d\alpha}{(x-\alpha)^2} = \frac{1}{x^2} \int \left(1 + \frac{2\alpha}{x}\right) f(\alpha) d\alpha,$$

et si l'on prend l'origine des coordonnées de manière à avoir

$$\int f(\alpha) \alpha d\alpha = 0,$$

on trouvera

$$(5) \qquad y = \left[\frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{gx}{k^2} - \theta\right) - \frac{k^2}{\pi g^2 x^2}\right] \int f(\alpha d\alpha).$$

Enfin si l'on veut déterminer les sommets des ondes, on égalera à zéro la différentielle de y, prise par rapport à x, ce qui donnera

$$(6) \qquad \cos\left(\frac{gx}{k^2} - \theta\right) + \frac{2k^6}{\pi g^3 x^3} = 0.$$

L'équation (5) montre que pour des valeurs très-grandes de x la fonction y devient périodique : elle reprend la même valeur quand on attribue à la variable x un accroissement Δ qui est déterminé par l'équation

$$g\Delta = 2\pi . k^2.$$

On voit donc que la ligne Δ représente la largeur d'une onde. Avec

la même approximation, on tire de l'équation (6)

$$\frac{gx}{k^2} = \theta \pm (2i+1)\frac{\pi}{2},$$

i étant un nombre entier quelconque, pourvu qu'il soit très-grand ; le signe *plus* se rapporte à des ondes qui se trouvent au-devant de la bande soumise à la pression $f(x)$, et le signe *moins* à celles qui sont en arrière d'elle. L'intervalle Δ compris entre deux sommets consécutifs, savoir la largeur d'une onde, sera déterminée par l'équation

$$g\Delta = 2\pi . k^2.$$

En supposant encore

$$gx = k^2\left[\theta + (2i+1)\frac{\pi}{2} + \delta\right],$$

on aura d'après l'équation (6), et pour une seconde approximation,

$$\delta = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^i}{\left[\theta + (2i+1)\frac{\pi}{2}\right]^3}.$$

La valeur de θ se déterminera pour toute fonction donnée f. Soit pris, par exemple,

$$f(x) = h(l^2 - x^2),$$

l et h étant des constantes. Nous aurons

$$\int_{-l}^{+l}(l^2 - \alpha^2)\,\alpha\, d\alpha = 0,$$

$$\int_{-l}^{+l}(l^2 - \alpha^2)\cos\frac{g\alpha}{k^2}\,d\alpha = 4\left(\frac{k^2}{g}\right)^3\left(\sin\frac{gl}{k^2} - \frac{gl}{k^2}\cos\frac{gl}{k^2}\right),$$

$$\int_{-l}^{+l}(l^2 - \alpha^2)\sin\frac{g\alpha}{k^2}\,d\alpha = -4\left(\frac{k^2}{g}\right)^3\left(\cos\frac{gl}{k^2} + \frac{gl}{k^2}\sin\frac{gl}{k^2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\tang\theta = \frac{gl\sin\frac{gl}{k^2} + k^2\cos\frac{gl}{k^2}}{gl\cos\frac{gl}{k^2} - k^2\sin\frac{gl}{k^2}},$$

ou plus simplement

$$\tang \theta = \tang \left(\frac{gl}{k^2} + n\right),$$

en faisant

$$\tang n = \frac{k^2}{gl}.$$

Il est à peine nécessaire d'observer que dans les applications on devra supposer $k^2 < gl$.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

PAR M. H. SCHRÖTER.

Breslau, 10 mai 1858.

La théorie des équations modulaires étant devenue l'objet de plusieurs communications à votre illustre Académie, je prends la liberté de vous adresser par la poste deux Mémoires que j'ai publiés, il y a plusieurs années déjà, comme thèses pour le doctorat et pour l'agrégation à la Faculté des Sciences de Breslau.

J'ai pris dans mes recherches pour point de départ une formule dont M. Jacobi a donné un cas particulier (*Journal de Mathématiques* de M. Crelle, tome III, page 305). En employant les séries que M. Jacobi a introduites dans l'analyse,

$$\vartheta(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{hh} \cos 2hx,$$

$$\vartheta_1(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^h q^{\left(h+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2h+1)x,$$

$$\vartheta_2(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(h+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2h+1)x,$$

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{hh} \cos 2hx,$$

séries entre lesquelles existent les relations connues

$$\vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{2}, q\right) = \vartheta(x, q),$$

$$q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \vartheta_3\left(x - \frac{i \log q}{2}, q\right) = \vartheta_2(x, q), \qquad i = \sqrt{-1},$$

$$\frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{i \log q}{2}, q\right) = \vartheta_1(x, q).$$

on a la formule générale

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-py,q^p)\\&=\sum_{\mu=0}^{\mu=p} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+y)}\vartheta_3\left[(p+1)x-p\mu\varpi,\ q^{p(p+1)}\right].\vartheta_3\left[(p+1)y-\mu\varpi,\ q^{p+1}\right],\end{aligned}\right.$$

p étant un nombre entier positif et $\varpi = i\log q$.

Le cas de $p=1$ est celui qui a été considéré par M. Jacobi.

A l'aide de cette formule on peut former les équations modulaires pour la transformation de l'ordre $p=2^n-1$, en n'appliquant que les formules connues pour la transformation du deuxième ordre.

En effet, si l'on pose $p=3$, on tire de l'équation (I),

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-3y,q^3)+\vartheta(x+y,q)\vartheta(x-3y,q^3)\\&=2\vartheta_3(4y,q^4)\vartheta_3(4x,q^{12})+2\vartheta_2(4y,q^4)\vartheta_2(4x,q^{12}),\end{aligned}$$

et en se servant des formules connues

$$\begin{aligned}2\vartheta_3(2z,q^4)&=\vartheta_3(z,q)+\vartheta(z,q),\\2\vartheta_2(2z,q^4)&=\vartheta_3(z,q)-\vartheta(z,q),\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-3y,q^3)+\vartheta(x+y,q)\vartheta(x-3y,q^3)\\&=\vartheta_3(2y,q)\vartheta_3(2x,q^3)+\vartheta(2y,q)\vartheta(2x,q^3),\end{aligned}$$

d'où découle sur-le-champ une foule de formules en augmentant les éléments x et y de $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\varpi}{2}$, etc.

Je n'indiquerai que les deux formules suivantes :

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-3y,q^3)-\vartheta_2(x+y,q)\vartheta_2(x-3y,q^3)\\&=\vartheta(2y,q)\vartheta(2x,q^3)-\vartheta_1(2y,q)\,\vartheta_1(2x,q^3);\end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2(x+y,q)\vartheta_1(x-3y,q^3)+\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_2(x-3y,q^3)\\&=2\vartheta(4y,q^4)\vartheta_1(4x,q^{12})+2\vartheta_1(4y,q^4)\vartheta(4x,q^{12}).\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, dans l'équation (1), $2x=2y=z$, on aura

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(z,q)\,\vartheta_3(z,q^3)+\vartheta_1(z,q)\vartheta_1(z,q^3)\\&=\vartheta(z,q)\vartheta(z,q^3)+\vartheta_2(z,q)\vartheta_2(z,q^3),\end{aligned}\right.$$

et pour $z = 0$,

$$\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(0, q^3) = \vartheta(0, q)\,\vartheta(0, q^3) + \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(0, q^3),$$

relation qui donne immédiatement l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k_1\lambda_1} = 1,$$

en écrivant comme d'habitude

$$\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} = \sqrt{k}, \qquad \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} = \sqrt{k_1}, \qquad k^2 + k_1^2 = 1,$$

$$\frac{\vartheta_2(0, q^3)}{\vartheta_3(0, q^3)} = \sqrt{\lambda}, \qquad \frac{\vartheta(0, q^3)}{\vartheta_3(0, q^3)} = \sqrt{\lambda_1}, \qquad \lambda^2 + \lambda_1^2 = 1.$$

On tire aussi de l'équation (3) la suivante, en supposant $z = \mu\varpi$ (μ étant un nombre entier) :

$$(4)\quad \vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(\mu\varpi, q^3) = \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(\mu\varpi, q^3) + \vartheta(0, q)(-1)^\mu\,\vartheta(\mu\varpi, q^3).$$

Si l'on fait $y = 0$, $x = \mu\varpi$, la formule (2) devient

$$\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_1(\mu\varpi, q^3) = 2p^{\mu\mu}\,\vartheta(0, q^4)\,\vartheta_1(4\mu\varpi, q^{12}),$$

et en posant $q^{\frac{1}{2}}$ au lieu de q

$$(5)\qquad q^{\frac{\mu\mu}{6}} \cdot \vartheta_2\left(0, q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_1\left(\frac{\mu\varpi}{2}, q^{\frac{3}{2}}\right) = 2q^{\frac{2\mu\mu}{3}}\,\vartheta(0, q^2)\,\vartheta_1(2\mu\varpi, q^6).$$

Cette équation bien remarquable se déduit aussi des développements connus des fonctions ϑ en produits infinis.

Passons à présent au cas de $p = 7$; on aura en vertu de la formule (I),

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(x + y, q)\,\vartheta_3(x - 7y, q^7) + \vartheta(x + y, q)\,\vartheta(x - 7y, q^7) \\ &= \vartheta_3(4y, q^2)\,\vartheta_3(4x, q^{14}) + \vartheta(4y, q^2)\,\vartheta(4x, q^{14}) \\ &+ \vartheta_2(4y, q^2)\,\vartheta_2(4x, q^{14}) - \vartheta_1(4y, q^2)\,\vartheta_1(4x, q^{14}), \end{aligned}$$

d'où découle pareillement un grand nombre de formules, dont je ne

citerai que les deux cas spéciaux

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2\left(0,q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_2\left(\mu\varpi,q^{\frac{7}{2}}\right)\\&=q^{2\mu\mu}[\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(\mu\varpi,q^7)+\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(\mu\varpi,q^7)-\vartheta(0,q)\vartheta(\mu\varpi,q^7)],\end{aligned}\right.$$

$$(7)\left\{\begin{aligned}&2(-1)^\mu\vartheta(0,q^2)\vartheta(2\mu\varpi,q^{14})\\&=q^{2\mu\mu}[\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(\mu\varpi,q^7)-\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(\mu\varpi,q^7)+\vartheta(0,q)\vartheta(\mu\varpi,q^7)],\end{aligned}\right.$$

d'où vient, en faisant $\mu=0$ et ajoutant,

$$\frac{1}{2}\vartheta_2\left(0,q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_2\left(0,q^{\frac{7}{2}}\right)+\vartheta(0,q^2)\vartheta(0,q^{14})=\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^7),$$

ce qui fournit en k et λ l'équation modulaire pour la transformation du septième ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}=1.$$

De la même manière j'ai trouvé l'équation modulaire pour la transformation du trente-unième ordre

$$\sqrt[8]{k\lambda}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\frac{1+\lambda}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1-k}{2}\frac{1-\lambda}{2}}\right)-\sqrt[4]{k\lambda}$$
$$=\sqrt[8]{k_1\lambda_1}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k_1}{2}\frac{1+\lambda_1}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1-k_1}{2}\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}.$$

On peut obtenir une autre forme de cette équation modulaire, plus analogue aux formes précédentes, mais plus compliquée.

A l'aide de la formule générale (I) on peut former les équations modulaires pour la transformation de l'ordre $p=3.2^n-1$, si l'on a égard à la relation (4) ou, ce qui est plus simple, à la formule (5).

On a pour $p=5$

$$\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-5y,q^5)$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=5}q^{\mu\mu}e^{2\mu i(x+y)}\vartheta_3(6y-\mu\varpi,q^6)\vartheta_3(6x-5\mu\varpi,q^{30}),$$

d'où l'on tire

$$\vartheta_3(x+y,q^2)\vartheta_2(x-5y,q^{10})-\vartheta_2(x+y,q^2)\vartheta_3(x-5y,q^{10})$$
$$=\sum_0^2 q^{2\mu\mu}e^{2\mu i(x+y)}\vartheta_1(3y-\mu\varpi,q^3)\vartheta_1(3x-5\mu\varpi,q^{15})$$

et

$$\vartheta\left(x+y, q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_3\left(x-5y, q^{\frac{5}{2}}\right)-\vartheta_3\left(x+y, q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta\left(x-5y, q^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= 2\sum q^{2\mu\mu} e^{4\mu i(x+y)}\vartheta_1(6y-\mu\varpi, q^3)\vartheta_1(6x-5\mu\varpi, q^{15}),$$

d'où, pour $x = y = 0$,

$$\vartheta_3(0,q)\vartheta_2(0,q^5)-\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q^5)$$

$$= \sum q^{\mu\mu}\vartheta_1\left(\frac{\mu\varpi}{2}, q^{\frac{3}{2}}\right)\vartheta_1\left(\frac{5\mu\varpi}{2}, q^{\frac{15}{2}}\right)$$

et

$$\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q^5)-\vartheta_3(0,q)\vartheta(0,q^5)$$

$$= 2\sum q^{4\mu\mu}\vartheta_1(2\mu\varpi, q^6)\vartheta_1(10\mu\varpi, q^{30});$$

en tenant compte de la relation (5), mettant q^5 au lieu de q, et multipliant, on trouve

$$\frac{1}{2}\vartheta_2\left(0,q^{\frac{1}{2}}\right)\vartheta_2\left(0,q^{\frac{5}{2}}\right)[\vartheta_3(0,q)\vartheta_2(0,q^5)-\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q^5)]$$

$$= \vartheta(0,q^2)\vartheta(0,q^{10})\left\{\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q^5)-\vartheta_3(0,q)\vartheta(0,q^5)\right\},$$

ce qui donne entre $k, \lambda, k_1, \lambda_1$ l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda}\,(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}) = \sqrt[4]{k_1\lambda_1}\,(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{k_1}).$$

De la même manière résulte l'équation modulaire pour la transformation du onzième ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\frac{1+\lambda}{2}}\right)-\sqrt{\frac{1-k}{2}\frac{1-\lambda}{2}}\Bigg)$$

$$-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\left(\sqrt{\frac{1+k_1}{2}\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\frac{1-\lambda_1}{2}}\right) = \sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\sqrt[4]{k\lambda}\,(k+\lambda)-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\,(k_1+\lambda_1) = 2(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1})\sqrt{\frac{1+k\lambda+k_1\lambda_1}{2}}$$

qui me paraît préférable à la précédente.

J'ai encore appliqué la même méthode à déduire l'équation modulaire pour la transformation du vingt-troisième ordre, et j'ai trouvé la relation suivante :

$$\begin{aligned} &2(k\lambda)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt[4]{\frac{1-k}{2}\frac{1-\lambda}{2}}\right) \\ &+2(k_1\lambda_1)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt[4]{\frac{1-k_1}{2}\cdot\frac{1-\lambda_1}{2}}\right) \\ &=\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}+(\sqrt[4]{k\lambda}-\sqrt[4]{k_1\lambda_1})(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1}). \end{aligned}$$

Par les relations (6) et (7), on peut former les équations modulaires pour les nombres $p = 7.2^n - 1$ au moyen de la formule générale (I). Pour la transformation du treizième ordre, j'ai trouvé l'équation modulaire

$$\begin{aligned} &\sqrt{k\lambda}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt{\frac{1-k}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{2}}\right) \\ &+\sqrt{k_1\lambda_1}\left(\sqrt{\frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\cdot\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)+\sqrt{\frac{1+k\lambda+k_1\lambda_1}{2}} \\ &=\sqrt[4]{k\lambda}(\sqrt{k}+\sqrt{\lambda})+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}(\sqrt{k_1}+\sqrt{\lambda_1})+\sqrt{k\lambda k_1\lambda_1}(\sqrt{k\lambda_1}-\sqrt{k_1\lambda}), \end{aligned}$$

que l'on pourrait mettre sous plusieurs formes.

Les formes des équations modulaires que vous trouverez dans mon premier Mémoire sont plus compliquées que les précédentes; il en serait de même pour les équations modulaires que je pourrais ajouter relativement aux nombres 17, 19, 29. Dans mon second Mémoire je me suis occupé de la formule suivante, plus générale que (I):

$$(\text{II})\quad\left\{\begin{aligned} &\vartheta_3(tx+sry,q^r)\,\vartheta_3(sx-tpy,q^p) \\ &=\sum_{\mu=0}^{\mu=rs^2+pt^2-1} q^{r\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sry)}\vartheta_3\left[(rs^2+pt^2)y-s.r.\mu\varpi,q^{r(s^2+pt^2)}\right] \\ &\times\vartheta_3\left[(rs^2+pt^2)x-tpr\mu\varpi,q^{rp(rs^2+pt^2)}\right], \end{aligned}\right.$$

p, r, s, t étant des nombres premiers entre eux.

Je m'étais proposé le problème d'exprimer à l'aide d'équations

algébriques les valeurs de

$$q^{\frac{\mu\mu}{p}} \vartheta_3(\mu\varpi, q^p), \quad \left[\begin{array}{l}\text{pour } \mu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2} \\ p \text{ étant un nombre premier}\end{array}\right]$$

par le plus petit nombre des valeurs de $\vartheta_3\left(0, q^{\frac{m}{n}}\right)$.

Je suis parvenu entre autres au résultat curieux qu'il ne faut que des équations du second degré pour déterminer les valeurs de

$$q^{\frac{\mu\mu}{17}} \vartheta_3(\mu\varpi, q^{17}), \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, 8),$$

en supposant connues les valeurs de $\vartheta_3(0, q^5)$, $\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{5}}\right)$, $\vartheta_3(0, q^{17})$, $\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{17}}\right)$, résultat qui est analogue à la division du cercle en dix-sept parties égales.

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES
ET
SUR LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. KRONECKER.

TRADUCTION DE M. HOUEL.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, séance du 29 octobre 1857.)

M. Kummer donne lecture d'un Mémoire communiqué par M. Kronecker.

Dans un Mémoire d'Abel (t. Ier, p. 272 de ses *OEuvres complètes*) se trouve cette remarque, que les modules des fonctions elliptiques, pour lesquelles la multiplication complexe a lieu, peuvent s'exprimer complétement par des radicaux. Mais on n'y rencontre aucune indication sur la manière dont Abel a découvert cette propriété remarquable de cette classe de fonctions elliptiques. Qu'il y soit parvenu pour la première fois *après* la rédaction du Mémoire intitulé : *Recherches sur les fonctions elliptiques,* c'est ce qui ressort d'un passage de ce Mémoire (t. Ier, p. 248 des *OEuvres complètes,* ou t. III, p. 182 du *Journal* de Crelle), où l'auteur exprime encore un doute sur la résolubilité des équations d'où dépend la détermination des modules en question. Désirant parvenir à une démonstration de cette proposition d'Abel, je me suis occupé l'hiver dernier de recherches sur les fonctions elliptiques pour lesquelles a lieu la multiplication complexe, et j'ai trouvé non-seulement la démonstration cherchée, mais encore plusieurs résultats intéressants dont je vais ici exposer sommairement quelques-uns.

Soit n un nombre positif impair et plus grand que 3; désignons de plus par $\varkappa$ le module des fonctions elliptiques et par k le carré de ce module. Le nombre des valeurs différentes de k, pour lesquelles on

peut effectuer la multiplication des fonctions elliptiques par $\sqrt{-n}$, c'est-à-dire pour lesquelles $\sin^2 \mathrm{am}\,(\sqrt{-n}.u,\ \varkappa)$ peut être exprimé en fonction rationnelle de $\sin^2 \mathrm{am}\,(u,\ \varkappa)$ et de $\varkappa$, est égal au sextuple du nombre des classes différentes de formes quadratiques appartenant au déterminant $-n$. Toutes ces valeurs de k sont des fonctions algébriques explicites d'une quelconque d'entre elles; elles sont, de plus, les racines d'une équation à coefficients *entiers*, dont le degré est égal au nombre de ces valeurs, et qui peut se décomposer en autant de facteurs *entiers* qu'il y a d'ordres différents appartenant au déterminant $-n$. A chacun de ces ordres correspond un facteur déterminé de cette équation, dont le degré est égal à six fois le nombre des classes renfermées dans l'ordre en question. Le facteur correspondant à l'ordre proprement primitif est enfin décomposable en six facteurs de même degré, dont les coefficients ne contiennent que des nombres entiers et le radical $\sqrt{n}$. Le degré de chacune de ces six équations partielles est ainsi égal au nombre des classes proprement primitives appartenant au déterminant $-n$, et c'est une de ces équations partielles qui présente le plus clairement le caractère de résolubilité. Les racines de cette équation ont en effet cette propriété, qu'elles peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles (n'ayant pour coefficients que des nombres entiers) de l'une quelconque d'entre elles, et que, pour deux quelconques de ces fonctions $\varphi(k)$, $\psi(k)$, on a la relation

$$\varphi[\psi(k)] = \psi[\varphi(k)].$$

Si n est un nombre premier et que $-n$, considéré comme déterminant d'une forme quadratique, soit régulier, l'équation partielle en question est une équation abélienne, et, dans tous les autres cas, le caractère particulier de cette équation, le nombre des périodes de ses racines, etc., dépendent du nombre des genres et de l'exposant d'irrégularité du déterminant $-n$. Si enfin n est un nombre pair, ou s'il est un des nombres 1, 3, les valeurs correspondantes de k ont des propriétés tout à fait analogues à celles que nous venons de mentionner. Mais, quelle que soit la valeur du nombre n, à une seule et même classe de formes quadratiques de déterminant $-n$ répond toujours un système déterminé de valeurs de k, et cela de telle sorte que l'on peut

toujours exprimer sous forme transcendante les valeurs de k au moyen des coefficients d'une quelconque des formes contenues dans cette classe, et réciproquement ces coefficients au moyen des valeurs de k.

Les fonctions elliptiques pour lesquelles la multiplication complexe a lieu, tiennent, pour leurs propriétés essentielles, le milieu entre les fonctions circulaires et les autres fonctions elliptiques. En effet, de même que les valeurs

$$k = 0 \quad \text{et} \quad k = \pm 1,$$

correspondantes aux fonctions circulaires, doivent être considérées comme des limites extrêmes, de même aussi les valeurs des modules de chaque classe particulière de fonctions elliptiques prendront le caractère de limites extrêmes, lorsque, pour ces valeurs, les équations modulaires présenteront des racines égales, comme cela avait lieu pour les valeurs particulières 0 et ± 1. De plus, les fonctions circulaires étant susceptibles de multiplication seulement, tandis que les fonctions elliptiques, prises dans leur généralité, sont susceptibles à la fois de multiplication et de transformation, il arrive, pour cette classe particulière de fonctions elliptiques, que la transformation perd en partie son caractère propre, et devient elle-même une sorte de multiplication, puisqu'elle équivaut jusqu'à un certain point à la multiplication par un nombre imaginaire. De même, en effet, que pour un nombre p pouvant être représenté par la forme principale $x^2 + ny^2$, de déterminant $-n$, une des transformations d'ordre p donne la multiplication par $x + y\sqrt{-n}$, c'est-à-dire l'expression de $\sin^2 \operatorname{am}(x + y\sqrt{-n}).u$ en fonction rationnelle de $\sin^2 \operatorname{am} u$ et de x; de même le nombre pouvant être représenté par une des autres formes de déterminant $-n$, il y a une des transformations d'ordre q qui conduit à une fonction transformée $\sin^2 \operatorname{am}(\mu.u, \lambda)$, exprimée en fonction rationnelle de $\sin^2 \operatorname{am}(u, \varkappa)$ et de $\varkappa$, et dans laquelle λ est un des autres modules pour lesquels a lieu la multiplication par $\sqrt{-n}$, et de plus μ est une valeur déterminée de $\sqrt{-n}$ (mod. q), et joue précisément le rôle d'un facteur imaginaire de q. Ces multiplicateurs μ sont des irrationnelles algébriques explicites, et c'est une circonstance digne de remarque à plusieurs égards, que l'on rencontre ici pour la première fois un

exemple dans lequel l'analyse donne des expressions irrationnelles pour représenter des nombres imaginaires.

D'après la liaison étroite qui existe entre les fonctions elliptiques pour lesquelles a lieu la multiplication par $\sqrt{-n}$ et les formes quadratiques de déterminant $-n$, il est évident que l'étude de cette classe particulière de fonctions elliptiques doit conduire à un grand nombre de résultats relatifs à la théorie des formes quadratiques. Parmi ces résultats, je me contenterai de rapporter ici quelques formules récurrentes d'une remarquable simplicité, que l'on peut établir pour la détermination des nombres de classes correspondantes aux déterminants négatifs, et qui sont éminemment propres au calcul de ces nombres. Ces formules ne sont pas non plus sans intérêt au point de vue purement théorique, d'autant plus que quelques-unes d'entre elles semblent très-difficiles à démontrer par les procédés arithmétiques. Le reste de ces formules peut, il est vrai, se déduire de la relation connue entre le nombre de représentations d'un nombre n par la somme de trois carrés et le nombre des classes de déterminant $-n$. Mais l'emploi de cette relation pour la démonstration de ces formules est entièrement nouveau, et, ce qui est bien plus important, cette relation elle-même peut réciproquement se démontrer au moyen de ces formules qui résultent de la théorie des fonctions elliptiques. Comme exemple de ces formules, on peut choisir les trois suivantes, dont la seconde seule peut se déduire de la manière que nous venons d'indiquer par les procédés arithmétiques. On a les relations

$$\text{(I)}\qquad 2F(n) + 4F(n-2^2) + 4F(n-4^2) + \ldots = \varphi(n) - \psi(n),$$

$$\text{(II)}\qquad 4F(n-1^2) + 4F(n-3^2) + 4F(n-5^2) + \ldots = \varphi(n) + \psi(n),$$

$$\text{(III)}\qquad F(n) + 2F(n-1^2) + 2F(n-2^2) + \ldots = \varphi(n),$$

en supposant

$$n \equiv 3 \pmod{4};$$

et en désignant en outre par $F(m)$ le nombre des classes proprement primitives et de leurs dérivées pour le déterminant $-m$; par $\varphi(n)$ la somme des diviseurs de n plus grands que $\sqrt{n}$, et par $\psi(n)$ la somme

de tous les autres diviseurs. Je ferai encore remarquer que la suite des nombres

$$n, \quad n - 1^2, \quad n - 2^2, \ldots,$$

dans les trois formules ne doit être prolongée qu'autant que ces nombres sont positifs, et que la formule (III) est une conséquence immédiate des formules (I) et (II).

Si l'on désigne par $\mathrm{H}(m)$ le nombre des classes proprement primitives de déterminant $-m$, les résultats renfermés dans les formules précédentes peuvent encore être présentés sous une autre forme remarquable. En désignant par D tous les nombres positifs pour lesquels n peut être représenté par la forme $x^2 + \mathrm{D}y^2$ et par h le nombre de ces représentations différentes (en ayant soin de faire la distinction entre les valeurs positives et négatives de x et de y), on obtient l'équation

$$\sum h.\mathrm{H}(\mathrm{D}) = 2\varphi(n),$$

qui est précisément le résultat exprimé par la formule (III).

Nos trois formules fournissent encore une solution très-élégante du problème posé par M. Dirichlet dans le t. III du *Journal* de Crelle, p. 407, solution qui me semble préférable à celle qu'a publiée Jacobi dans le t. IX du même journal. Ce problème consiste à déterminer, pour les nombres premiers n qui divisés par 4 donnent pour reste 3, la valeur de l'exposant ν dans la congruence

$$1.2.3\ldots\frac{n-1}{2} \equiv (-1)^\nu \pmod{n}.$$

Or, en s'aidant de la célèbre expression donnée par M. Dirichlet (*Journal* de Crelle, t. XXI, p. 152) pour le nombre des classes relatives au déterminant $-n$, les formules précédentes fournissent la règle suivante pour déterminer le nombre ν : *Le nombre ν est égal au nombre des déterminants négatifs et impairs différents, pour lesquels n peut être représenté par la forme principale, et qui sont des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.* Cette règle peut encore s'énoncer ainsi : *ν est la multitude de ceux parmi les nombres*

$n - 2^2$, $n - 4^2$, $n - 6^2$,..., *qui sont de la forme*

$$r^2 . p^{4i+1},$$

p étant un nombre premier et r un nombre non divisible par p. Et l'on voit par là que la détermination du nombre ν se réduit à la décomposition en leurs facteurs premiers de certains nombres, tous plus petits que n, et dont la multitude est moindre que $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. ÉDOUARD ROCHE.

Le terme complémentaire de la série de Taylor est donné par les auteurs sous deux formes différentes dont l'une, due à Cauchy, se déduit assez facilement de l'autre. Mais ces deux formes peuvent être considérées comme des cas particuliers d'une expression plus générale du reste. Si l'on arrête le développement de $f(x+h)$ au terme en h^n, le terme complémentaire est égal à

$$(1) \qquad R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n.(p+1)} f^{n+1}(x+\theta h),$$

p étant un nombre pris arbitrairement entre o et n, et θ un nombre convenablement choisi entre o et 1.

En y faisant $p = n$, on reproduit la première forme du reste. Si au contraire on fait $p = 0$, on a la seconde forme, celle de Cauchy. Quand $n = 0$, ces diverses expressions du reste se réduisent à une seule qui est $hf'(x+\theta h)$.

Pour obtenir la formule (1), la méthode la plus simple consiste dans l'emploi du calcul intégral. On observe que

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-t)\,dt;$$

et par une suite d'intégrations par parties, on est amené à représenter le terme complémentaire par

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h t^n f^{n+1}(x+h-t)\,dt.$$

Cela suppose que la fonction $f(x)$ et ses $n+1$ dérivées restent finies et continues entre les limites x et $x+h$, c'est-à-dire pour les valeurs de t comprises entre o et h.

Décomposons maintenant la différentielle en

$$t^p\,dt.t^{n-p} f^{n+1}(x+h-t),$$

et remplaçons le second facteur par une quantité constante intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des valeurs qu'il prend lorsque t passe de o à h. Cette fonction est continue dans l'intervalle, puisque la dérivée a été supposée finie et continue, et que t^{n-p} l'est également si l'on attribue à p une valeur au plus égale à n. La moyenne dont nous parlons s'obtiendra donc en donnant à t une certaine valeur comprise entre o et h que nous appellerons $h(1-\theta)$. Cette valeur moyenne sera par conséquent

$$h^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x+\theta h).$$

Quant à l'autre facteur, il ne devient pas infini si p est positif, et l'on a

$$\int_0^h t^p\,dt = \frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Donc enfin

$$\mathrm{R} = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{h^{p+1}}{p+1}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x+\theta h),$$

comme il fallait l'établir.

Il ne serait pas difficile de démontrer la formule (1) par les méthodes qui servent ordinairement à calculer le terme complémentaire, et qui reviennent toujours à une intégration par parties déguisée : car c'est du calcul intégral que dépend essentiellement la formule de Taylor. Si, par exemple, on veut suivre la démonstration donnée dans le *Cours d'Analyse* de Sturm, il suffira d'y remplacer l'identité (p. 88), que l'auteur retranche de son équation (3), par l'identité suivante

$$\frac{d.}{dx}\,\frac{(z-x)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}\mathrm{C} = -\frac{(z-x)^p}{1.2\ldots n}\mathrm{C},$$

p étant un nombre positif au plus égal à n. On arrivera, sans autre changement, à la formule (1).

L'emploi de cette expression du terme complémentaire peut être quelquefois avantageux, parce qu'il dispense de considérer successivement les deux formes ordinaires du reste, comme on le fait pour établir le développement de $(1+x)^m$ ou de $\log(1+x)$.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

CINQUIÈME ARTICLE.

Nous nous proposons surtout, dans ce cinquième article, de revenir sur les formules des deux articles précédents pour les généraliser, en y introduisant, comme nous avons déjà averti qu'on pouvait le faire, une fonction arbitraire de deux variables. Nous ajouterons d'ailleurs quelques remarques.

I.

Commençons par les formules du troisième article, que nous réduisons à deux (D) et (F), la formule (E) n'étant pas au fond distincte de la formule (D). Ces formules (D) et (F), que nous allons tout à la fois étendre et condenser pour ainsi dire en une formule unique, se rapportent à un nombre impair $m > 1$, décomposé sous la forme

$$m = m' + 2^{\alpha''} m'',$$

c'est-à-dire décomposé en deux parties entières positives, dont l'une m' est impaire, tandis que l'autre est le produit d'un nombre impair m'' par une puissance de 2. Ayant posé

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

on a, par la formule (F), une expression commode de la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''} d'') - f(d' + 2^{\alpha''} d'')\right]\right\},$$

prise pour les diviseurs d', d'' de tous les groupes m', m'' considérés successivement. Il arrive que la valeur de cette somme triple ne dépend que des diviseurs de m : elle est égale à la moitié de la somme simple

$$\sum(\delta - d) f(d).$$

Toutefois la fonction f n'est pas absolument à volonté : nous admettons que $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage.

Or je dis qu'on peut substituer à la fonction $f(x)$ une fonction $f(x, y)$ de deux variables pour laquelle on ait

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y),$$

et considérer la somme triple bien plus compliquée

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''}d'', \delta' + \delta'') - f(d' + 2^{\alpha''}d'', \delta' - \delta'')\right]\right\}.$$

La valeur que je trouve pour le double de cette nouvelle somme est égale à la différence des deux sommes simples

$$\sum[f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1)]$$

et

$$\sum df(d, 0).$$

Ainsi l'on a

$$(d)\quad\left\{\begin{aligned} &2\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - 2^{\alpha''}d'', \delta' + \delta'') - f(d' + 2^{\alpha''}d'', \delta' - \delta'')\right]\right\}\\ &= \sum[f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1) - df(d, 0)];\end{aligned}\right.$$

et je vais montrer que cette formule (d) renferme à la fois nos deux anciennes formules (F) et (D).

D'abord il est bien clair qu'en réduisant $f(x, y)$ à une fonction $f(x)$ d'une seule variable, vérifiant la condition $f(-x) = f(x)$, on retombera sur la formule (F); car, dans cette hypothèse, on a

$$f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1) = \delta f(d),$$

ce qui réduit le second membre de la formule (d) à

$$\sum(\delta - d) f(d)$$

comme dans la formule (F), qui a d'ailleurs évidemment, dans ce cas, le même premier membre que (d).

Mais nous pouvons aussi retrouver d'une manière semblable la formule (D). Il suffit pour cela de supposer la fonction $f(x, y)$ réduite à $f(y)$, ce qui exige que $f(-y) = f(y)$. Alors, en effet, le premier membre de la formule (d) deviendra

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(\delta' + \delta'') - f(\delta' - \delta'')]\right\},$$

ce qui équivaut à

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d' + d'') - f(d' - d'')]\right\},$$

parce que la signification des lettres d et δ dans nos formules permet de remplacer ici δ' par d' et δ'' par d''. Quant au second membre, dont la valeur est

$$\sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1) - df(0)],$$

il est la différence des deux quantités

$$\sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1)]$$

et

$$f(0)\sum d,$$

dont la première peut être remplacée par

$$\sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d - 1)],$$

en écrivant d au lieu de δ, et la seconde par

$$f(0)\zeta_1(m),$$

suivant une notation à laquelle nos lecteurs doivent être accoutumés. La somme triple

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\},$$

égale au signe près à

$$2\sum\left\{\sum\sum[f(d'+d'')-f(d'-d'')]\right\},$$

est donc égale à la différence entre

$$f(0)\zeta_1(m)$$

et

$$\sum[f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(d-1)];$$

or c'est là précisément ce qu'exprime la formule (D).

Pour passer de la formule (D) à la formule (E), il suffit de prendre

$$f(x)=\mathrm{F}(x+1)-\mathrm{F}(x-1),$$

valeur qui s'accorde bien avec la condition

$$f(-x)=f(x),$$

parce que l'on suppose

$$\mathrm{F}(-x)=-\mathrm{F}(x).$$

Nous avons donc terminé tout ce qui concerne l'extension à donner aux formules de notre troisième article.

Comme $\delta'+\delta''$ et $\delta'-\delta''$ sont des nombres pairs, il s'ensuit que les valeurs de y à employer, dans la fonction $f(x,y)$ que la formule (d) contient, sont des nombres pairs : on remplira donc les conditions auxquelles cette fonction $f(x, y)$ est assujettie en lui donnant la valeur que voici :

$$(-1)^{\frac{y}{2}}f(x),$$

pourvu que

$$f(-x)=f(x).$$

On est ainsi conduit facilement à l'équation

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} 2\sum\left\{\sum\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\left[f(d'-2^{\alpha''}d'')+f(d'+2^{\alpha''}d'')\right]\right\} \\ \qquad = \sum df(d)-\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}f(d). \end{array}\right.$$

Ce résultat particulier de notre formule générale (d) méritait d'être indiqué à côté des formules (D), (E), (F) : il nous sera utile plus tard.

II.

Passons aux formules (G) et (H) du quatrième article et considérons-les successivement.

Dans la formule (G), on s'occupe d'un nombre entier quelconque, que l'on représente par $2^{\alpha}m$, le facteur m étant impair. L'exposant α est un quelconque des nombres 0, 1, 2, 3, etc. On décompose $2^{\alpha}m$ en deux parties entières positives, de manière à avoir

$$2^{\alpha}m = 2^{\alpha'}m' + 2^{\alpha''}m'',$$

m' et m'' étant impairs, puis on pose à l'ordinaire

$$m = d\delta,\quad m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta''.$$

Enfin on forme une somme triple portant sur l'ensemble des diviseurs relatifs aux divers groupes m', m'', et l'on exprime cette somme triple au moyen d'une somme simple qui ne porte plus que sur les diviseurs de m.

La somme triple dont la formule (G) fournit la valeur est

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(2^{\alpha'}d'-2^{\alpha''}d'')-f(2^{\alpha'}d'+2^{\alpha''}d'')\right]\right\},$$

la fonction $f(x)$ étant arbitraire, sous la seule condition que

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x employées.

Or nous allons maintenant prendre une fonction $f(x, y)$ de deux variables, et admettant que l'on a

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y),$$

nous chercherons la valeur de la somme triple qui contient sous les trois $\sum$ la quantité suivante

$$f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'', \delta' + \delta'') - f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'', \delta' - \delta''),$$

c'est-à-dire la valeur de

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'', \delta' + \delta'') - f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'', \delta' - \delta'')\right]\right\}.$$

Cette valeur est naturellement assez compliquée. Pour l'obtenir, il faut ajouter entre elles les deux sommes

$$\sum d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(0, 2^{\alpha}d)]$$

et

$$\sum[f(2^{\alpha}d, 0) + 2f(2^{\alpha}d, 2) + 2f(2^{\alpha}d, 4) + \ldots + 2f(2^{\alpha}, \delta - 1)],$$

puis en retrancher

$$2^{\alpha}\sum f(2^{\alpha}d, 0).$$

Il est important de bien remarquer la nature différente des quantités placées, tant sous le signe f que hors du signe f, dans les deux sommes

$$f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(0, 2^{\alpha}d)$$

et

$$f(2^{\alpha}d, 0) + 2f(2^{\alpha}d, 2) + 2f(2^{\alpha}d, 4) + \ldots + 2f(2^{\alpha}d, \delta - 1).$$

Dans celle-ci, la variable x de la fonction $f(x, y)$ est constamment égale à $2^{\alpha}d$, l'autre variable y est un nombre pair qui croît de zéro à $\delta - 1$. Quant au coefficient de f, il est 1 dans le premier terme

et 2 dans les suivants. Ainsi, pour $\delta = 1$, la somme

$$f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2) + 2f(2^\alpha d, 4) + \ldots + 2f(2^\alpha d, \delta - 1)$$

se réduit à

$$f(2^\alpha d, 0);$$

pour $\delta = 3$, elle est égale à

$$f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2);$$

pour $\delta = 5$ à

$$f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2) + 2f(2^\alpha d, 4);$$

et ainsi de suite.

Dans

$$f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\alpha-1} f(0, 2^\alpha d),$$

la première variable x de $f(x, y)$ est toujours égale à zéro, tandis que la seconde y varie en progression géométrique dont la raison est 2 : y croît de $2d$ à $2^\alpha d$; aussi n'aurait-on aucun terme à prendre si l'on voulait supposer $\alpha = 0$, mais alors $2^\alpha m$ deviendrait un nombre impair m, et l'on retomberait sur la formule (d) du paragraphe précédent. Pour $\alpha = 1$, on n'aura qu'un terme

$$f(0, 2d);$$

pour $\alpha = 2$, on a deux termes,

$$f(0, 2d) + 2f(0, 4d);$$

pour $\alpha = 3$, on a trois termes

$$f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d);$$

et ainsi de suite, le coefficient de f pour chaque terme étant la moitié du coefficient de d sous le signe f.

Sous le bénifice de ces explications, nous écrirons donc la formule

remarquable

$$(e)\begin{cases}\sum\left\{\sum\sum\left[f(2^{\alpha'}d'-2^{\alpha''}d'',\delta'+\delta'')-f(2^{\alpha}d'+2^{\alpha''}d'',\delta'-\delta'')\right]\right\}\\ =\sum d\left[f(0,2d)+2f(0,4d)+4f(0,8d)+\ldots+2^{\alpha-1}f(0,2^{\alpha}d)\right]\\ +\sum\left[f(2^{\alpha}d,0)+2f(2^{\alpha}d,2)+2f(2^{\alpha}d,4)+\ldots+2f(2^{\alpha}d,\delta-1)\right]\\ -2^{\alpha}\sum df(2^{\alpha}d,0).\end{cases}$$

En réduisant $f(x,y)$ à $f(x)$ sous la condition, bien entendu, de $f(-x)=f(x)$, on réduit le premier membre de la formule (e) à celui de la formule (G). Je dis qu'il en est de même pour les seconds membres. En effet, d'une part

$$f(0,2d)+2f(0,4d)+4f(0,8d)+\ldots+2^{\alpha-1}f(0,2^{\alpha}d)$$

se réduit à

$$(2^{\alpha}-1)f(0),$$

et, d'autre part, la somme

$$f(2^{\alpha}d,0)+2f(2^{\alpha}d,2)+2f(2^{\alpha}d,4)+\ldots+2f(2^{\alpha}d,\delta-1)$$

se trouve égale à

$$\delta f(2^{\alpha}d).$$

Le second membre de la formule (e) devient donc

$$(2^{\alpha}-1)f(0)\sum d+\sum(\delta-2^{\alpha}d)f(2^{\alpha}d);$$

et pour prouver qu'il coïncide avec le second membre de la formule (G), qui est

$$\sum(\delta-2^{\alpha}d)\left[f(2^{\alpha}d)-f(0)\right],$$

c'est-à-dire

$$f(0)\sum(2^{\alpha}d-\delta)+\sum(\delta-2^{\alpha}d)f(2^{\alpha}d),$$

il suffit de faire voir que l'on a

$$(2^{\alpha}-1)\sum d=\sum(2^{\alpha}d-\delta);$$

or cela devient évident si l'on observe que

$$\sum(2^\alpha d - \delta) = 2^\alpha \sum d - \sum \delta$$

et que

$$\sum \delta = \sum d.$$

Mais on aura une formule nouvelle en réduisant $f(x, y)$ à $f(y)$, sous la condition de $f(-y) = f(y)$. On aura alors pour premier membre

$$\sum\left\{\sum\sum[f(\delta' + \delta'') - f(\delta' - \delta'')]\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d' + d'') - f(d' - d'')]\right\}.$$

Quant au second membre, il prend la valeur que voici :

$$\sum d\,[f(2d) + 2f(4d) + 4f(8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(2^\alpha d)]$$

$$+ \sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)] - 2^\alpha f(0) \sum d.$$

En posant donc

$$\sum d = \zeta_1(m),$$

on trouve facilement que

$$(\mathrm{J})\left\{\begin{aligned} 2^\alpha f(0)\zeta_1(m) = {} & \sum d[f(2d) + 2f(4d) + 4f(8d) + \ldots + 2^{\alpha-1}f(2^\alpha d)] \\ & + \sum[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1)] \\ & + \sum\left\{\sum\sum[f(d' - d'') - f(d' + d'')]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Faisons encore, dans la formule générale (e),

$$f(x, y) = (-1)^{\frac{y}{2}} f(x),$$

ce qui nous est permis, pourvu que $f(-x) = f(x)$, parce que y est ici un nombre essentiellement pair. Nous en conclurons facilement la formule que voici :

$$(\mathrm{K})\left\{\begin{aligned}&\sum\left\{\sum\sum(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\left[f(2^{\alpha'}d' - 2^{\alpha''}d'') + f(2^{\alpha'}d' + 2^{\alpha''}d'')\right]\right\}\\ &= (3-2^{\alpha})f(0)\zeta_1(m) + \sum\left[2^{\alpha}d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right]f(2^{\alpha}d).\end{aligned}\right.$$

On pourrait ainsi tirer de la formule (e) beaucoup de formules particulières, et cela ne serait pas sans quelque intérêt. Mais nous nous en tiendrons pour le moment à ce qui précède.

III.

Généralisons maintenant la formule (H). Dans cette formule on n'accorde aucune attention spéciale au nombre 2 qu'on mettait tout à l'heure en évidence comme facteur avec divers exposants. Ainsi on désigne par m (et non plus par $2^{\alpha}m$) le nombre entier pair ou impair auquel on rapporte tous les calculs. On décompose ce nombre en deux parties positives m', m'', dont chacune peut être indifféremment un entier pair ou un entier impair. Désignant ensuite par d un diviseur quelconque de m, par d' un diviseur quelconque de m', par d'' un diviseur quelconque de m'', on pose

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

chacun des nombres d, δ, d', δ', d'', δ'' pouvant être pair ou impair; et ces équations, jointes à l'équation fondamentale

$$m = m' + m'',$$

fixent le mode de partition du nombre m auquel la formule (H) s'applique.

Mais en restant dans ces mêmes conditions, je vais donner une formule dans laquelle entrera une fonction $f(x, y)$ de deux variables.

J'admets que l'on a

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs de x et de y qui seront employées ensemble : la fonction $f(x, y)$ est du reste à volonté. On considère la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(d' + d'', \delta' - \delta'')\right]\right\},$$

ou bien encore la somme triple évidemment égale

$$\sum\left\{\sum\sum\left[f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(\delta' + \delta'', d' - d'')\right]\right\},$$

et il s'agit de trouver la valeur de cette somme triple qui concerne tous les diviseurs propres aux groupes m', m'' pris successivement, au moyen de sommes simples qui ne portent plus que sur les diviseurs de m.

Cette valeur est formée de trois sommes partielles. Dans la première, savoir :

$$\sum (d - 1)\left[f(0, d) - f(d, 0)\right],$$

le signe $\sum$ garde sa signification ordinaire. Mais dans les deux autres, que j'écris ainsi :

$$\sum{}'\left[f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + f(\delta, 4) + \ldots + f(\delta, d - 1)\right],$$

et

$$\sum{}'\left[f(2, \delta) + f(3, \delta) + f(4, \delta) + \ldots + f(d - 1, \delta)\right],$$

l'accent marqué sur le signe indique que l'on doit omettre pour l'une les termes $f(\delta, y)$ où y est un diviseur de d, et pour l'autre les termes analogues $f(x, \delta)$ où x divise d. Ainsi, pour $d = 1$ et $d = 2$, les deux sommes sont nulles, puisqu'il n'y a alors aucun terme à prendre ; pour $d = 3$, elles sont respectivement égales à $f(\delta, 2)$ et $f(2, \delta)$; pour $d = 4$, à $f(\delta, 3)$ et $f(3, \delta)$, parce que 2 étant un diviseur de 4, on

doit omettre les termes $f(\delta, 2)$ et $f(2, \delta)$; pour $d = 5$, à

$$f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + f(\delta, 4) \quad \text{et} \quad f(2, \delta) + f(3, \delta) + f(4, \delta);$$

et ainsi de suite.

La nature de nos trois sommes simples étant bien fixée, on en déduira la somme triple en ajoutant à la première somme simple le double de la différence des deux autres.

En d'autres termes, on a

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'') - f(d'+d'', \delta'-\delta'')]\right\} \\ = &\sum(d-1)[f(0,d) - f(d,0)] \\ &+ 2\sum{}'[f(\delta,2) + f(\delta,3) + f(\delta,4) + \ldots + f(\delta, d-1)] \\ &- 2\sum{}'[f(2,\delta) + f(3,\delta) + f(4,\delta) + \ldots + f(d-1,\delta)]. \end{aligned}\right.$$

On pourrait, comme nous l'avons déjà dit, remplacer la somme triple, au premier membre, par celle-ci :

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'', \delta'+\delta'') - f(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\}.$$

D'après cela, on pourra écrire la formule (f) plus simplement, en faisant

$$f(x, y) - f(y, x) = \mathrm{f}(x, y).$$

Alors on aura

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left[\sum\sum \mathrm{f}(d'-d'', \delta'+\delta'')\right] \\ &= \sum(d-1)\mathrm{f}(0,d) + 2\sum{}'[\mathrm{f}(\delta,2) + \mathrm{f}(\delta,3) + \mathrm{f}(\delta,4) + \ldots + \mathrm{f}(\delta,d-1)]. \end{aligned}\right.$$

Il faut dans la somme accentuée négliger les termes $\mathrm{f}(\delta, y)$ dans lesquels y est un diviseur de d. Ainsi la valeur de

$$\sum{}'[\mathrm{f}(\delta, 2) + \mathrm{f}(\delta, 3) + \mathrm{f}(\delta, 4) + \ldots + \mathrm{f}(\delta, d-1)]$$

est zéro pour $d=1$ et $d=2$; elle est $\mathrm{f}(\delta, 2)$ pour $d=3$; $\mathrm{f}(\delta, 3)$ pour $d=4$, parce que 2 divisant 4, le terme $\mathrm{f}(\delta, 2)$ doit être omis. Et ainsi de suite.

Ayant admis que

$$f(-x,y)=f(x,y)=f(x,-y),$$

nous devons naturellement admettre aussi que

$$\mathrm{f}(-x, y)=\mathrm{f}(x, y)=\mathrm{f}(x, -y).$$

De plus, il est clair que l'on doit avoir

$$\mathrm{f}(y, x)=-\mathrm{f}(x,y).$$

Sous ces conditions la formule (g) a lieu, quelle que soit du reste la fonction f.

L'introduction d'une pareille fonction dans les formules (B) et (b), de nos deux premiers articles, en aurait aussi abrégé l'écriture; mais c'est ici surtout qu'elle nous a semblé utile.

Pour déduire la formule (H) de la formule (f), il suffit de supposer que $f(x, y)$ ne contient pas y et se réduit à $f(x)$, sous la condition, bien entendu, de $f(-x)=f(x)$. Il est d'abord évident que les premiers membres de (f) et (H) seront alors identiques. Examinons les termes dont le second membre de la formule (f) se compose, et voyons ce qu'ils deviennent. Le premier de ces termes donne

$$\sum(d-1)[f(0)-f(d)],$$

c'est-à-dire

$$[\zeta_1(m)-\zeta(m)]f(0)-\sum(d-1)f(d),$$

$\zeta(m)$ étant le nombre des diviseurs de m et $\zeta_1(m)$ leur somme. Pour trouver ce que donne le second, j'observe que la somme

$$f(\delta, 1)+f(\delta, 2)+f(\delta, 3)+\ldots+f(\delta, d-1)+f(\delta, d)$$

devient égale à

$$df(\delta),$$

quand on remplace $f(x, y)$ par $f(x)$; mais comme dans

$$2\sum{}'[f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + \ldots + f(\delta, d-1)]$$

nous n'avons ni $f(\delta, 1)$, ni $f(\delta, d)$, et comme en outre nous devons omettre $f(\delta, y)$ quand y divise d, nous perdons $f(\delta)$ un nombre de fois marqué par $\zeta(d)$: il ne nous reste donc à sommer que

$$[d - \zeta(d)]\, f(\delta);$$

de là, pour le terme que nous cherchons, cette valeur

$$2\sum[d - \zeta(d)]\, f(\delta),$$

ou, ce qui revient au même,

$$2\sum[\delta - \zeta(\delta)]\, f(d).$$

Enfin le troisième terme, qu'on doit prendre négativement, fournit, au signe près,

$$2\sum{}'[f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(d-1)].$$

Il faut omettre, dans cette somme accentuée, les termes où le nombre placé sous le signe f divise d. Tout calcul fait, on retrouve donc le second membre de la formule (II).

IV.

A côté des formules que nous avons données jusqu'ici, on peut en écrire d'autres qui sont à la vérité évidentes et comme identiques, mais qu'il est pourtant bon d'indiquer parce qu'elles pourront servir quelquefois. Un seul exemple suffira. Plaçons-nous donc relativement au nombre m dans les conditions que suppose la formule (f), c'est-à dire faisons de toutes les manières possibles

$$m = m' + m'', \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

d', δ', d'', δ'' étant des entiers positifs. La formule citée fournit la va-

leur de l'une ou de l'autre des deux sommes triples équivalentes

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\delta'+\delta'')-f(d'+d'',\delta'-\delta'')]\right\}$$

et

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'',d'-d'')]\right\}:$$

mais nous avons admis que la fonction $f(x, y)$ est paire relativement aux deux variables qu'elle contient.

Or, en désignant au contraire par $\mathrm{F}(x, y)$ une fonction impaire relativement à x, nulle pour $x = 0$, et quelconque du reste, on aura évidemment

$$\sum\left[\sum\sum \mathrm{F}(d'-d'',\delta'+\delta'')\right]=0.$$

Car, d'une part, les termes pour lesquels $d' = d''$ sont nuls, puisque, par hypothèse, $\mathrm{F}(0, y) = 0$; et, d'autre part, les termes où d' diffère de d'' se détruisent deux à deux comme égaux et de signes opposés, vu qu'à toute décomposition $d'\delta' + d''\delta''$ de cette espèce répond la décomposition inverse $d''\delta'' + d'\delta'$ pour laquelle $d' - d''$ se change en $d'' - d'$, ce qui fait changer F de signe.

De même si la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ était impaire par rapport à y et nulle pour $y = 0$, on aurait

$$\sum\left[\sum\sum \mathrm{F}(\delta'+\delta'',d'-d'')\right]=0.$$

Si donc la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ est impaire tout à la fois par rapport à x et par rapport à y, et nulle pour $x = 0$ et pour $y = 0$, les deux équations que nous venons d'écrire auront lieu à la fois. On pourra donc en conclure *a fortiori* que

$$\sum\left\{\sum\sum[\mathrm{F}(d'-d'',\delta'+\delta'')-\mathrm{F}(\delta'+\delta'',d'-d'')]\right\}=0.$$

équation qui, du reste, aurait encore lieu pour une fonction non impaire, mais symétrique par rapport aux deux variables x, y.

Il s'ensuit que la formule (f) peut fournir la valeur de la somme

$$\sum\left\{\sum\sum[\psi(d'-d'',\delta'+\delta'')-\psi(d'+d'',\delta'-\delta'')]\right\},$$

ou, ce qui revient au même, de la somme

$$\sum\left\{\sum\sum[\psi(d'-d'', \delta'+\delta'')-\psi(\delta'+\delta'', d'-d'')]\right\},$$

même quand ψ n'est pas une fonction paire $f(x, y)$; car si l'on ajoutait à $f(x,y)$ une fonction impaire $\mathrm{F}(x, y)$, en prenant

$$\psi(x,y)=f(x, y)+\mathrm{F}(x, y),$$

le second terme ne donnerait rien dans la somme relative à ψ : et il en serait de même si la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ n'étant plus impaire était symétrique, ou enfin si elle était la somme de deux fonctions l'une impaire et l'autre symétrique par rapport aux deux variables.

Ainsi nos formules ont plus d'étendue qu'on n'aurait pu le penser d'abord, d'après l'énoncé que nous avons cru devoir en donner. Ajoutons que si les conditions sous lesquelles nous les avons présentées sont toujours suffisantes, elles ne sont pas absolument nécessaires; de sorte que, même en laissant de côté l'artifice dont nous venons de nous servir pour en tirer de nouveaux usages, elles ont un peu plus de généralité que nous ne l'avons dit. Cela résultera nettement des démonstrations très-simples par lesquelles nous les établirons. Mais, au fond, cette extension sera peu utile, et nous devons bien nous garder d'insister longuement sur de tels détails.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

Par M. TCHEBICHEF [*].

Traduit du russe par M. I.-J. Bienaymé.

PRÉSENTÉ LE 12 JANVIER 1855 A L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG.

Au mois d'octobre de l'année dernière, j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences un des résultats de mes recherches sur l'interpolation : c'était une formule qui représente approximativement une fonction cherchée, d'après plusieurs de ses valeurs particulières, et dont les coefficients sont déterminés par les conditions de la *Méthode des moindres carrés*. Cette formule, comme on le voit par mon écrit inséré dans le *Bulletin de l'Académie* (t. XIII, n° 13) sous le titre de *Note sur une formule d'Analyse*, s'obtient à l'aide du développement d'une certaine fonction en fraction continue. Ajournant ce qui touche aux conséquences de cette formule relatives à l'interpola-

[*] M. Tchebichef a considéré le Mémoire dont nous donnons la traduction comme se rattachant aux fractions continues. Mais on verra que ce Mémoire traite réellement d'un procédé d'interpolation par la méthode des moindres carrés. Le problème de l'auteur ne diffère en effet que par l'énoncé de ceux que se sont posés, d'une part Legendre ou Gauss, en demandant que la somme des carrés des premiers membres d'un système d'équations fût réduite au minimum; de l'autre Laplace, en cherchant le minimum des erreurs dont se trouvent affectées les solutions de ce système, obtenues à l'aide de multiplicateurs linéaires.

On peut voir p. 306-307 du XVIII[e] volume de ce journal (ou bien *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 4 juillet 1853) qu'il est toujours possible d'interpoler une série quelconque par la méthode des moindres carrés. On trouve, en résolvant les équations, les fonctions que Gauss a distinguées le premier, et qui se présentaient si naturellement dans la théorie des équations du premier degré. Lorsqu'au lieu de donner un certain nombre de valeurs de la fonction à interpoler, on la regarde comme continue entre deux limites données, les fonctions signalées par Gauss (et qui sont celles que M. Cauchy a désignées par Δ dans le II[e] volume de ce Journal), ces fonctions deviennent aussi continues, au moins entre ces limites. Elles

tion, jusqu'à la fin de mes recherches sur ce sujet, je vais la considérer ici dans ses rapports avec les fractions continues, comme exprimant une propriété particulière de ces fractions.

Je commencerai par la déduction de la formule que j'avais présentée sans démonstration dans l'écrit cité tout à l'heure. Ensuite je ferai voir ce qu'on peut en tirer relativement aux propriétés des fractions convergentes qu'on obtient en développant de certaines fonctions en fractions continues.

§ I.

Nous commencerons nos recherches par la solution de la question suivante :

On connaît des valeurs de la fonction F (x) *pour* $(n+1)$ valeurs de la variable, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et l'on suppose que la fonction puisse être représentée par la formule*

$$a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

l'exposant m ne surpassant pas n. Il s'agit de trouver les coefficients de la formule en les assujettissant à ne laisser aux erreurs des valeurs F (x_0), F (x_1), F (x_2), ..., F (x_n), *que la moindre influence possible sur une valeur quelconque* F (X).

---

satisfont alors à des équations aux différentielles partielles du second ordre, et ce sont les fonctions mêmes qui ont été discutées par MM. Sturm et Liouville dans plusieurs beaux Mémoires (*voir* notamment les deux premiers volumes de ce Journal). Toutes les fonctions que MM. Sturm et Liouville ont indiquées par la lettre V, satisfont aux conditions de la méthode des moindres carrés, et fournissent autant de procédés d'interpolation, jouissant d'un minimum d'erreurs ; de même que la formule trigonométrique de Fourier, qui a été employée par Bessel. Réciproquement les coefficients que détermine la méthode des moindres carrés jouissent des propriétés qui appartiennent aux fonctions V. C'est là ce qui rattache cette méthode à l'ensemble des théories analytiques dont elle paraîtrait isolée par son origine, due au calcul des probabilités. Le travail de M. Tchebichef, en reliant aux fractions continues une classe au moins des fonctions ou des coefficients mis en évidence par Gauss dans la *Méthode des moindres carrés*, répand une clarté nouvelle sur les liens cachés qui réunissent les diverses parties de l'analyse des séries ou de l'interpolation. Ce sont ces considérations qui nous ont porté à traduire ce morceau, intéressant d'ailleurs à d'autres égards. I.-J. Bienaymé.

On obtient immédiatement cette suite d'équations

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= a + bx_0 + cx_0^2 + \ldots + gx_0^{m-1} + hx_0^m,\\
F(x_1) &= a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + gx_1^{m-1} + hx_1^m,\\
F(x_2) &= a + bx_2 + cx_2^2 + \ldots + gx_2^{m-1} + hx_2^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(x_n) &= a + bx_n + cx_n^2 + \ldots + gx_n^{m-1} + hx_n^m.
\end{aligned}$$

Pour exprimer la valeur de $F(X)$ à l'aide de ces équations, nous les multiplierons par des facteurs indéterminés $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et nous en prendrons la somme

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n)\\
= \;& a(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\\
+ \;& b(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)\\
+ \;& c(\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2)\\
+ \;& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ \;& g(\lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \ldots + \lambda_n x_n^{m-1})\\
+ \;& h(\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \ldots + \lambda_n x_n^m).
\end{aligned}$$

Si, maintenant, nous comparons cette somme à l'expression de $F(X)$, qui doit être

$$F(X) = a + bX + cX^2 + \ldots + gX^{m-1} + hX^m,$$

nous trouverons que pour assurer la relation

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

il suffit que les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ satisfassent aux équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n = 1,\\
&\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n = X,\\
&\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n^2 = X^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \ldots + \lambda_n x_n^{m-1} = X^{m-1},\\
&\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \ldots\ldots + \lambda_n x_n^m = X^m.
\end{aligned}\right.$$

Lorsque $m = n$, ces équations déterminent complétement les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, puisque le nombre des unes et des autres est le même. Dans ce cas le système de facteurs ainsi calculé est le seul qui puisse former les coefficients de l'expression générale

$$F(x) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n).$$

Si, au contraire, $m < n$, ces équations pourront être satisfaites d'une infinité de manières, et chaque système de valeurs assignées aux facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dans la formule

$$F(x) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

fournira une expression différente de F(X). Mais, d'après la dernière condition du problème, il faut choisir, parmi toutes les expressions de F(X), celle dans laquelle les erreurs des valeurs $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2), \ldots, F(x_n)$ ont le minimum d'influence sur la grandeur cherchée $F(x)$. Or on sait, par la théorie des probabilités, qu'on parviendra à ce but, en assujettissant les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de F(X) à réduire au minimum la somme

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \ldots + k_n^2 \lambda_n^2,$$

dans laquelle $k_0^2, k_1^2, k_2^2, \ldots, k_n^2$ désignent des quantités proportionnelles aux moyennes des carrés des erreurs des valeurs $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2), \ldots, F(x_n)$. On voit que, pour plus de généralité, nous supposons différentes les unes des autres les lois des erreurs de ces $(n+1)$ quantités. Si la loi de probabilité est la même pour toutes, on a dans ce cas

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_n,$$

et l'on peut réduire ces multiplicateurs à l'unité.

La solution de la question se trouve ramenée par ce qui précède à exprimer F(X) par la formule

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n);$$

en déterminant les facteurs λ par les équations (1), et par la condition

du minimum de la somme

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \ldots + k_n^2 \lambda_n^2.$$

Remarquons, en passant, que cette condition peut être étendue au cas même, dans lequel $m = n$. Car les facteurs λ sont alors complétement déterminés par les équations (1), et la condition du minimum de la somme des carrés n'exige plus rien; ce qui s'accorde avec ce qui a déjà été dit de ce cas particulier.

Arrivant au calcul des facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, supposons que $\theta(x)$ soit une fonction entière de x, qui pour les valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x, prenne respectivement les valeurs $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$. La somme

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \ldots + k_n^2 \lambda_n^2$$

s'écrira sous la forme

$$\frac{\lambda_0^2}{\theta^2(x_0)} + \frac{\lambda_1^2}{\theta^2(x_1)} + \frac{\lambda_2^2}{\theta^2(x_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{\theta^2(x_n)}.$$

Pour déterminer, par la condition du minimum de cette somme, les quantités $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, liées entre elles par les équations (1), nous en prendrons la différentielle, et, suivant le procédé ordinaire des minima et maxima, nous l'égalerons à la somme des différentielles des équations (1), multipliées chacune par des arbitraires $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ respectivement. Égalant ensuite les termes qui auront pour facteurs $d\lambda_0, d\lambda_1, d\lambda_2, \ldots, d\lambda_n$, nous trouvons les $(n+1)$ équations

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{2\lambda_0}{\theta^2(x_0)} = \mu_0 + \mu_1 x_0 + \mu_2 x_0^2 + \ldots + \mu_m x_0^m, \\ \dfrac{2\lambda_1}{\theta^2(x_1)} = \mu_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_1^2 + \ldots + \mu_m x_1^m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{2\lambda_n}{\theta^2(x_n)} = \mu_0 + \mu_1 x_n + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m x_n^m. \end{cases}$$

Réunies aux équations (1), les équations (2) déterminent complète-

ment les $(n+1)$ inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et les $(m+1)$ arbitraires $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Ainsi toute la difficulté est ramenée à la solution de ces équations. Voici le procédé particulier que nous emploierons pour y parvenir.

§ II.

En posant $\varphi(x) = \frac{\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_m x^m}{2}$, nous transformons les équations (2) en celles-ci :

$$\frac{\lambda_0}{\theta^2(x_0)} = \varphi(x_0), \quad \frac{\lambda_1}{\theta^2(x_1)} = \varphi(x_1), \ldots, \frac{\lambda_n}{\theta^2(x_n)} = \varphi(x_n);$$

et nous en tirons

$$(3) \quad \lambda_0 = \theta^2(x_0)\varphi(x_0), \quad \lambda_1 = \theta^2(x_1)\varphi(x_1), \ldots, \quad \lambda_n = \theta^2(x_n)\varphi(x_n).$$

Transportant ces valeurs dans les équations (1), elles prendront la forme

$$\begin{array}{ll}
\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + \theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots\ldots + \theta^2(x_n)\varphi(x_n) & = 1, \\
x_0\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n\theta^2(x_n)\varphi(x_n) & = X, \\
x_0^2\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1^2\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n^2\theta^2(x_n)\varphi(x_n) & = X^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x_0^{m-1}\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1^{m-1}\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n^{m-1}\theta^2(x_n)\varphi(x_n) & = X^{m-1}, \\
x_0^m\theta^2(x_0)\varphi(x_0) + x_1^m\theta^2(x_1)\varphi(x_1) + \ldots + x_n^m\theta^2(x_n)\varphi(x_n) & = X^m.
\end{array}$$

Il n'est pas difficile de remarquer, sous cette forme, que les premiers membres sont les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}, \frac{1}{x^{m+1}}$, dans la série qu'on obtient en développant, suivant les puissances décroissantes de x, la fonction

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x - x_n}.$$

Les seconds membres sont de même les coefficients du développe-

ment de

$$\frac{1}{x - X}.$$

Par conséquent ces équations peuvent être remplacées par la condition imposée à la différence des deux fonctions

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x - x_2} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x - x_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x - X},$$

de ne point renfermer dans son développement suivant les puissances descendantes de x, les termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}, \frac{1}{x^{m+1}}$. Si donc on met cette différence sous la forme d'une fraction $\frac{M}{N}$, le degré du dénominateur N surpassera le degré du numérateur au moins de $(m + 2)$. Les équations précédentes se réduiront donc à

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x - x_n} - \frac{1}{x - X} = \frac{M}{N}.$$

D'un autre côté en posant, pour abréger,

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = f(x),$$

et désignant par U la fonction entière, contenue dans la fraction $\frac{\theta^2(x)\varphi(x)f'(x)}{f(x)}$, on sait, par la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, que

$$\frac{\theta^2(x)\varphi(x)f'(x)}{f(x)} = U + \frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x - x_n}.$$

L'équation formée tout à l'heure prendra donc la forme

$$\frac{\theta^2(x)\varphi(x)f'(x)}{f(x)} - U - \frac{1}{x - X} = \frac{M}{N}.$$

ou bien, l'équivalente

$$\frac{(x - X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)} = \frac{(x - X)M}{\varphi(x)N}$$

En s'appuyant sur cette relation, il n'est pas difficile de trouver l'expression de la fonction $\varphi(x)$.

Remarquons, en effet, que la fraction $\frac{(x-\mathrm{X})\mathrm{M}}{\varphi(x)\mathrm{N}}$ est d'un degré inférieur au degré de $\frac{1}{\varphi^2(x)}$. Car $\varphi(x)$ représente la quantité

$$\frac{\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\ldots+\mu_m x^m}{2},$$

et, par suite, ne peut être d'un degré supérieur à m. En même temps le degré de N surpasse au moins de $(m+2)$ le degré de M; ainsi la fraction $\frac{(x-\mathrm{X})\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ est d'un degré inférieur à celui de $\frac{1}{\varphi(x)}$.

De là, nous concluons que dans la relation ci-dessus la fraction $\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}$ reproduit exactement la fonction $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ au moins jusqu'au terme du degré de $\frac{1}{\varphi^2(x)}$ inclusivement, c'est-à-dire jusqu'au terme dont le degré sera celui de l'unité divisée par le carré de son dénominateur. Mais, on le sait, ce degré d'exactitude appartient exclusivement aux fractions convergentes obtenues par la réduction de $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue. En outre, dans la suite de ces fractions convergentes, celle qui suivra $\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}$ aura nécessairement un dénominateur d'un degré supérieur à m. Car, sans cela, la différence

$$\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}-\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}$$

ne serait pas d'un degré inférieur à $\frac{1}{x^m\varphi(x)}$, comme le suppose notre relation

$$\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}-\frac{\mathrm{U}(x-\mathrm{X})+1}{\varphi(x)}=\frac{(x-\mathrm{X})\mathrm{M}}{\varphi(x)\mathrm{N}},$$

où, on l'a vu, la fraction $\frac{(x-\mathrm{X})\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ ne peut être d'un degré supérieur à $(-m-1)$.

Ainsi, la fraction $\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$ se trouvera au nombre des fractions convergentes dont on formera la suite, par le développement de $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue; et dans cette suite la fraction convergente, qui viendra immédiatement après, aura un dénominateur de degré supérieur à m; de sorte que la fraction $\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$, dont le dénominateur est d'un degré qui n'excède pas m, est nécessairement la dernière fraction convergente de dénominateur d'un degré qui n'excède pas m, dans la suite des fractions convergentes résultant du développement de l'expression $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue.

Cherchant donc cette fraction convergente, si nous la représentons par $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$, nous aurons l'équation

$$\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)} = \frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)};$$

d'où

$$U(x-X)+1 = \frac{\varphi^0(x)\varphi(x)}{\varphi_0(x)}.$$

Cette équation suppose que le produit $\varphi^0(x)\varphi(x)$ est divisible par $\varphi_0(x)$; et comme les propriétés des fractions convergentes exigent que $\varphi^0(x)$ et $\varphi_0(x)$ soient premiers entre eux, $\varphi_0(x)$ ne saurait diviser le produit sans diviser $\varphi(x)$. Représentant par q le quotient de cette division, nous aurons

$$\varphi(x) = q\varphi_0(x),$$

et cette valeur portée dans l'équation qui précède, donne

$$U(x-X)+1 = q\varphi^0(x).$$

Pour tirer de là une expression de $\varphi(x)$, nous remarquons que $\varphi(x)$ ne peut être d'un degré supérieur à m. Si donc le facteur $\varphi_0(x)$ est du degré m, le facteur q se réduit à une constante. Il est facile de la calculer, car en posant $x = X$ dans la dernière équation, il en résulte

$$1 = q\varphi^0(X) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{\varphi^0(X)},$$

puis enfin,

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi^0(X)}.$$

Telle est la valeur de la fonction $\varphi(x)$, quand $\varphi_0(x)$ est du degré m précisément. Dans tout autre cas, le degré de $\varphi_0(x)$ étant moindre que m, le facteur q de l'expression

$$\varphi(x) = q\,\varphi_0(x)$$

peut recevoir pour valeur une fonction entière quelconque de x, pourvu que le degré du produit $q\,\varphi_0(x)$ ne surpasse pas m. Ainsi, dans ce cas, il y aura une infinité de valeurs de la fonction cherchée $\varphi(x)$. Mais si l'on convient de prendre parmi ces valeurs celle dont le degré est le moins élevé, on sera de nouveau obligé de prendre pour q une constante, et l'on trouvera, comme précédemment, pour $\varphi(x)$ la valeur

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi^0(X)}.$$

D'après les équations (3), la fonction ainsi déterminée donne

$$\lambda_0 = \theta^2(x_0)\,\varphi(x_0), \quad \lambda_1 = \theta^2(x_1)\,\varphi(x_1), \ldots, \lambda_n = \theta^2(x_n)\,\varphi(x_n),$$

et ces valeurs sont les coefficients de la formule

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

par laquelle $F(X)$ est exprimée au moyen des valeurs particulières $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$.

Donc on aura finalement pour $F(X)$ l'expression

$$F(X) = \frac{\theta^2(x_0)\,\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(X)} F(x_0) + \frac{\theta^2(x_1)\,\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(X)} F(x_1) + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\,\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(X)} F(x_n).$$

Quant aux quantités $\varphi_0(x)$, $\varphi^0(x)$, on a vu qu'il suffisait, pour les déterminer, de réduire en fraction continue la fonction

$$\frac{(x - X)\,f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)},$$

et de prendre, dans la série des fractions convergentes, la dernière de

celles dont le degré du dénominateur ne surpasse pas m. Le numérateur de cette dernière fraction est $\varphi^0(x)$ et le dénominateur $\varphi_0(x)$.

La question que nous nous étions proposée au commencement du premier paragraphe, est ainsi résolue.

§ III.

En examinant la formule que nous venons de trouver, nous ne pouvons manquer de nous convaincre qu'elle doit présenter d'importantes simplifications. Effectivement, d'après la nature de la question, la fonction cherchée $F(X)$ doit être représentée par une fonction entière de X, tandis que la formule trouvée par nous contient le dénominateur $\varphi^0(X)$, et offre une composition telle, qu'on n'aperçoit pas comment X disparaîtra de ce dénominateur. Cela résulte de ce que les fonctions $\varphi^0(x)$, $\varphi_0(x)$, déterminées par le développement de l'expression $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue, renferment X dans leurs coefficients.

Afin d'amener notre valeur de $F(x)$ à une forme qui en laisse voir clairement la composition, nous allons montrer de quelle manière on passe des fractions convergentes de l'expression $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, aux fractions convergentes du produit $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$; et, par suite, à la fraction $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$.

Pour plus de simplicité, nous admettrons que la fraction continue

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ldots}}$$

résultant du développement de $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, ne contient que des dénominateurs $q_1, q_2, \ldots$ du premier degré en x; et que, par suite, les fractions convergentes

$$\frac{q_0}{1},\quad \frac{q_0q_1+1}{q_1},\quad \frac{q_0q_1q_2+q_2+q_0}{q_1q_2+1},\ldots$$

ont pour dénominateurs des fonctions des degrés $0, 1, 2, \ldots$ Nous re-

présenterons ces fractions convergentes respectivement par

$$\frac{\pi_0(x)}{\psi_0(x)}, \quad \frac{\pi_1(x)}{\psi_1(x)}, \quad \frac{\pi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots .$$

Il convient de faire observer encore que dans la fonction $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$ le degré du numérateur peut être moindre, mais d'une unité seulement, que le degré du dénominateur; ce qui exclut certains cas spéciaux, dépendant de conditions particulières entre les coefficients des fonctions $\theta(x)$ et $f(x)$, et donnant au développement en fraction continue une forme telle que plusieurs des dénominateurs $q_1, q_2, \ldots$ pourraient être du deuxième, du troisième degré, ou de degrés supérieurs. De plus, il est aisé de se convaincre que cette exception ne saurait exister dans la fraction

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

pour aucun des cas de l'interpolation ordinaire, où $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, racines de l'équation $f(x) = 0$, ont des valeurs réelles toutes différentes les unes des autres, et où la fonction $\theta(x)$ ne renfermant aucun coefficient imaginaire, prend pour $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs finies $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$. Dans cette hypothèse, on a effectivement, en se servant de la notation de M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, 25e Cahier),

$$\mathop{\mathbf{J}}_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}\right)\right) = n + 1,$$

et, d'après le procédé qui sert à déterminer la valeur de $\mathop{\mathbf{J}}_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}\right)\right)$, il est visible que pour fx de degré $(n+1)$, elle reste toujours inférieure à $(n+1)$, si dans la fraction

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}},$$

résultant du développement de $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$, un quelconque des dénominateurs q_1, q_2, q_3, ... est d'un degré supérieur au premier.

Convaincus par ces considérations que les limitations que nous avons apportées à la forme de la fraction continue déduite de la fonction $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$, n'ont point d'importance particulière, nous pouvons aborder à présent la détermination de $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$, c'est-à-dire de la dernière des fractions convergentes fournies par le développement de l'expression $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$, dont les dénominateurs n'ont pas un degré plus élevé que m. Nous démontrerons que cette fraction est exprimée par la formule

$$\frac{\psi_m(\mathrm{X})\,\pi_{m+1}(x) - \psi_{m+1}(\mathrm{X})\,\pi_m(x)}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]},$$

dans laquelle $\frac{\pi_m(x)}{\psi_m(x)}$, $\frac{\pi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}$ désignent les fractions convergentes de l'expression $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$, dont les dénominateurs sont des degrés m et $m+1$.

En effet, la composition de cette formule montre avec évidence que son dénominateur se réduit à une fonction entière d'un degré qui ne surpasse pas m. D'un autre côté, si nous prenons la différence entre cette même formule et l'expression $\frac{(x-\mathrm{X})f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$, nous trouvons

$$\frac{\left[\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}\right]\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \left[\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_m(x)}{\psi_m(x)}\right]\psi_{m+1}(\mathrm{X})\,\psi_m(x)}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]};$$

et cette différence ne peut être d'un degré supérieur à celui de

$$\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]}.$$

Car, d'après les propriétés des fractions convergentes, les deux termes

$$\left[\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_{m+1}(x)}{\psi_{m+1}(x)}\right]\psi_{m+1}(x), \quad \left[\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_m(x)}{\psi_m(x)}\right]\psi_m(x)$$

sont d'un degré moindre que $\frac{1}{\psi_m\,x}$, et, par suite, que $\frac{1}{x^m}$.

Ainsi, la fraction

$$\frac{\psi_m(\mathrm{X})\,\pi_{m+1}(x) - \psi_{m+1}(\mathrm{X})\,\pi_m(x)}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(x)\right]},$$

qui a un dénominateur dont le degré n'excède pas m, donnera exactement les termes de la fonction

$$\frac{(x-\mathrm{X})\,f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)},$$

jusqu'au terme dont le degré est le même que celui de l'expression

$$\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x-\mathrm{X}}\left[\psi_m(\mathrm{X})\,\psi_{m+1}(x) - \psi_m(x)\,\psi_{m+1}(\mathrm{X})\right]}.$$

Mais cette fonction ne peut être représentée avec cette exactitude que par les fractions convergentes que donne son développement en fraction continue, et seulement par celles qui sont suivies d'autres fractions convergentes dont les dénominateurs ont un degré supérieur à m. Par conséquent, notre fraction est au nombre de ces fractions convergentes, et comme le degré de son dénominateur ne surpasse pas m, elle est la dernière qui possède un dénominateur de cette espèce, et que nous avons désignée par $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$.

Cette conclusion nous permet de remplacer, dans la formule du paragraphe précédent,

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \frac{\theta^2(x_0)\,\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_0) + \frac{\theta^2(x_1)\,\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_1) + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)\,\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(\mathrm{X})}\mathrm{F}(x_n),$$

les expressions

$$\frac{\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(\mathrm{X})},\quad \frac{\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(\mathrm{X})},\ \ldots,\ \frac{\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(\mathrm{X})}$$

par celles-ci respectivement :

$$\frac{\frac{1}{x_0 - X}[\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_0) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_0)]}{\psi_m(X)\pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(X)},$$

$$\frac{\frac{1}{x_1 - X}[\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_1)]}{\psi_m(X)\pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(X)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\frac{1}{x_n - X}[\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_n) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_n)]}{\psi_m(X)\pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X)\pi_m(X)}.$$

Mais le dénominateur commun de toutes ces expressions se réduit à $(-1)^m$ d'après la théorie des fractions continues. De sorte que la formule qui donne $F(X)$ se ramène à la forme

$$\begin{aligned} F(X) = (-1)^m & \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_0) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_0)}{x_0 - X}\theta^2(x_0)F(x_0) \\ + (-1)^m & \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_1)}{x_1 - X}\theta^2(x_1)F(x_1) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (-1)^m & \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_n) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_n)}{x_n - X}\theta^2(x_n)F(x_n). \end{aligned}$$

On peut l'écrire sous cette forme abrégée :

$$F(X) = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_i)}{x_i - X}\theta^2(x_i)F(x_i).$$

Voilà donc une nouvelle formule propre à la détermination de $F(X)$ au moyen des valeurs $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$. Elle se construit à l'aide des fonctions $\psi_m(x)$ et $\psi_{m+1}(x)$, qui sont les dénominateurs de deux des fractions convergentes obtenues par le développement en fraction continue de l'expression $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$. De la composition même de cette nouvelle forme, on conclut sur-le-champ que c'est bien une fonction entière de X.

§ IV.

Nous allons maintenant faire voir comment la série dont nous avons parlé dans la Note présentée l'année dernière à l'Académie, se déduit de cette formule; et elle nous servira aussi à l'exposé de quelques propriétés des fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., déterminées par le développement de $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$ en fraction continue.

La formule que nous venons de trouver donne $F(X)$ dans l'hypothèse de la forme

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m.$$

Nous représenterons cette valeur de $F(X)$ par Y_m, et par Y_{m-1} la valeur de $F(x)$, qui serait déduite de l'hypothèse où $F(x)$ serait exprimée par

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1}.$$

La formule nouvelle fournira les deux valeurs suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} Y_m = (-1)^m \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X)\psi_m(x_i)}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)F(x_i), \\ Y_{m-1} = (-1)^{m-1} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_{m-1}(X)\psi_m(x_i) - \psi_m(X)\psi_{m-1}(x_i)}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)F(x_i). \end{cases}$$

Prenant la différence de ces valeurs, on trouve

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)[\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i)] - \psi_m(x_i)[\psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X)]}{x_i - X}\,\theta^2(x_i)F(x_i).$$

Les propriétés des fonctions $\psi_{m+1}(x)$, $\psi_m(x)$, $\psi_{m-1}(x)$, permettent de simplifier notablement cette différence. Ces fonctions sont, en effet, les dénominateurs de fractions convergentes résultant du développe-

ment de l'expression $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{q_{m+1} + \cdots}}}},$$

dans laquelle les dénominateurs $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots$ doivent être, par hypothèse, des fonctions linéaires de la variable x. On a donc conséquemment

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 x + B_1, \\ q_2 &= A_2 x + B_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ q_{m+1} &= A_{m+1} x + B_{m+1}. \end{aligned}$$

Par suite, la règle générale pour la formation des fractions convergentes donne

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(x) &= q_{m+1}\psi_m(x) + \psi_{m-1}(x) \\ &= (A_{m+1}x + B_{m+1})\psi_m(x) + \psi_{m-1}(x); \end{aligned}$$

et de là

$$\psi_{m+1}(x) - \psi_{m-1}(x) = (A_{m+1}x + B_{m+1})\psi_m(x).$$

Changeant x en x_i et en X, il en résulte

$$\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i) = (A_{m+1}x_i + B_{m+1})\psi_m(x_i),$$
$$\psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X) = (A_{m+1}X + B_{m+1})\psi_m(X).$$

Si l'on transporte ces valeurs dans celle de la différence $Y_m - Y_{m-1}$, on obtient

$$Y_m - Y_{m-1}$$
$$= (-1)^m \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\psi_m(x_i)(A_{m+1}x_i + B_{m+1}) - \psi_m(x_i)\psi_m(X)(A_{m+1}X + B_{m+1})}{x_i - X}\theta^2(x_i)F(x_i),$$

ou, en réduisant,

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i).$$

Posons dans cette relation $m = 1, 2, 3, \ldots, (m-1), m$ successivement, nous aurons

$$Y_1 - Y_0 = -A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

$$Y_2 - Y_1 = A_3 \psi_2(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

. . . .

$$Y_{m-1} - Y_{m-2} = (-1)^{m-1} A_m \psi_{m-1}(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_{m-1}(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i);$$

et la somme de ces équations donnera

$$\begin{aligned} Y_m - Y_0 = & - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) \\ & + A_3 \psi_2(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{m-1} A_m \psi_{m-1}(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_{m-1}(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) \\ & + (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i). \end{aligned}$$

Y_m aura donc pour valeur

$$Y_m = Y_0 - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)$$
$$+ A_3 \psi_2(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \ldots$$
$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i).$$

Pour déterminer la quantité Y_0, faisons $m = 0$ dans la formule (4), nous trouvons

$$Y_0 = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi_0(X)\psi_1(x_i) - \psi_1(X)\psi_0(x_i)}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i);$$

$\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ désignent les dénominateurs des deux premières fractions convergentes de l'expression $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, dont le développement en fraction continue a reçu les formes

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q^2 + \ddots}} = q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \ddots}}$$

Il en résulte

$$\psi_0(x) = 1, \qquad \psi_1(x) = A_1 x + B_1;$$

et la fonction Y_0 devient

$$Y_0 = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{A_1 x_i + B_1 - A_1 X - B_1}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i) = A_1 \sum_{i=0}^{i=n} \theta^2(x_i) F(x_i),$$

qu'on peut écrire

$$Y_0 = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

pourvu qu'on se rappelle que $\psi_0(x) = 1$.

Au moyen de cette valeur, l'expression précédente de Y_m, ou de la valeur de F (X), dans l'hypothèse

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

prend la forme symétrique

$$Y_m = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \ldots$$
$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i).$$

Dans cette expression, les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., et les constantes A_1, A_2, A_3,..., se déterminent, par le développement de la fonction $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}}}$$

Les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,... sont les dénominateurs des fractions convergentes que l'on déduit de cette fraction continue; et les constantes A_1, A_2, A_3,... sont les coefficients de x dans les dénominateurs q_1, q_2, q_3,....

Dans le cas particulier pour lequel la loi des erreurs est la même pour toutes les quantités $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$,..., on peut, conformément au § I, prendre toutes les valeurs k_0, k_1, k_2,... égales à 1, et par suite la fonction $\theta(x)$ déterminée par les équations

$$\theta(x_0) = \frac{1}{k_0}, \quad \theta(x_1) = \frac{1}{k_1}, \quad \theta(x_2) = \frac{1}{k_2}, \ldots,$$

se réduit elle-même à l'unité. La formule trouvée ci-dessus prend donc

alors la forme

$$Y_m = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) F(x_i) + \dots$$

$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) F(x_i).$$

Ici $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., A_1, A_2, A_3,... se déterminent par la fraction continue que donne la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$. C'est de cette série que nous avons parlé dans la Note déjà mentionnée [*]. Mais à présent nous ne nous bornerons pas à cette hypothèse particulière, qui réduit la fonction $\theta(x)$ à l'unité, et nous considérerons la série dans sa forme générale. Nous serons ainsi conduit à des propositions curieuses sur les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,....

§ V.

Il n'est pas difficile de voir que si les quantités

$$F(x_0), \quad F(x_1), \quad F(x_2), \dots, F(x_n)$$

sont déterminées exactement par la formule

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \dots + gx^{m-1} + hx^m,$$

notre série donnera l'expression exacte de cette fonction, quelle que puisse être la fonction $\theta(x)$. C'est ce qui devient évident, si l'on remarque que la série résulte de la formule

$$F(x) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \dots + \lambda_n F(x_n),$$

---

[*] La Note de M. Tchebichef, en date du 20 *octobre* (1er novembre 1854), ne contient effectivement que cette formule particulière. Les deux pages de cette Note se trouvent ainsi reproduites ici tout entières, à l'exception du corollaire que voici :

« Dans le cas particulier de $x_0 = \frac{n}{n}$, $x_1 = \frac{n-2}{n}$, $x_2 = \frac{n-4}{n}$,..., $x_n = \frac{-n}{n}$, et de
» n infiniment grand, cette formule fournit le développement de $F(x)$ suivant les va-
» leurs de certaines fonctions que Legendre a désignées par X^m (*Exerc.*, part V, § 10);
» et qui sont déterminées par la réduction de l'expression $\log \frac{x+1}{x-1}$ en fraction con-
» tinue. »

et que d'après l'une des conditions qui fixent les valeurs des facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, les équations suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n &= 1, \\
\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n &= X, \\
\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 &= X^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \ldots + \lambda_n x_n^m &= X^m.
\end{aligned}$$

Or en vertu de ces équations, la somme

$$\lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n),$$

quand on y remplace les quantités $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2), \ldots, F(x_n)$, par leurs valeurs tirées de l'équation

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m,$$

se réduit à

$$a + bX + cX^2 + \ldots + gX^{m-1} + hX^m,$$

expression exacte de $F(X)$, d'après l'hypothèse même

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + gx^{m-1} + hx^m.$$

Lors donc qu'il s'agit d'une fonction entière $F(x)$, la formule du paragraphe précédent permet de la représenter ainsi :

$$F(X) = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i) + \ldots$$
$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\theta^2(x_i)F(x_i).$$

Si nous faisons

$$F(x) = \psi_m(x),$$

nous trouverons

$$\psi_m(\mathrm{X})=\mathrm{A}_1\psi_0(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)-\mathrm{A}_2\psi_1(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)+\ldots$$

$$+(-1)^m\mathrm{A}_{m+1}\psi_m(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i);$$

ou bien, en mettant tous les termes dans un seul membre,

$$\mathrm{A}_1\psi_0(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)-\mathrm{A}_2\psi_1(\mathrm{X})\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\psi_m(x_i)+\ldots$$

$$+\psi_m(\mathrm{X})\left[(-1)^m\mathrm{A}_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)-1\right]=0.$$

Mais comme les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., sont respectivement des degrés 0, 1, 2, 3,..., l'identité précédente suppose que chacun de ses termes s'évanouit séparément. On a donc, de toute nécessité,

$$(-1)^m\mathrm{A}_{m+1}\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)-1=0,$$

$$\mathrm{A}_m\sum_{i=0}^{i=n}\psi_{m-1}(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{A}_2\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)=0,$$

$$\mathrm{A}_1\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\psi_m(x_i)\theta^2(x_i)=0.$$

La première de ces relations nous donne

$$\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\theta^2(x_i)=\frac{(-1)^m}{\mathrm{A}_{m+1}};$$

et, en observant que les coefficients $A_m, \ldots, A_2, A_1$, diffèrent tous de zéro, les autres relations font conclure que

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{i=n} \psi_{m-1}(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0, \\ \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0. \end{array}\right.$$

Il est par là manifeste que, pour m' différent de m, la somme $\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\psi_{m'}(x_i)\,\theta^2(x_i)$ est égale à zéro. Si au contraire $m' = m$, cette somme est égale à $\frac{(-1)^m}{A_{m+1}}$, comme on l'a vu tout à l'heure. On a donc pour le coefficient A_{m+1} la valeur

$$A_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

On en déduit pour tous les autres coefficients A

$$A_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$A_2 = \frac{-1}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

Si l'on introduit ces valeurs dans la formule

$$F(X) = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \ldots$$

$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

elle prend la forme

$$(6)\left\{\begin{aligned} F(X) = {} & \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_1(X) + \ldots \\ & + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_m(X). \end{aligned}\right.$$

La composition de cette formule fait voir qu'elle ne change pas de valeur, quand on introduit des facteurs constants arbitraires dans les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc. Il sera donc possible de prendre pour déterminer ces fonctions le développement de $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}},$$

quelles que puissent être les constantes L', L'', etc. On sait effectivement que les termes des fractions convergentes déduites d'une expression quelconque par le développement de cette expression en fraction

continue de l'une des deux formes

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}}, \qquad q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}},$$

ne diffèrent que par des facteurs constants.

De la même manière, précisément, les équations (5) resteront complétement exactes pour les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc., déterminées par le développement de $\frac{f'(x)\,\theta^2 x}{fx}$ en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}},$$

car elles ne seront point altérées par l'introduction de facteurs constants quelconques dans les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc. Ainsi en procédant actuellement aux applications de la formule (6) et des équations (5), nous ne serons point arrêtés par la supposition faite d'abord dans les paragraphes précédents, et d'après laquelle les numérateurs L', L'', etc., devaient être égaux à l'unité dans la fraction continue

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}},$$

qui servait à construire les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc.

En vertu de ces équations (5), il existe encore des relations remarquables entre les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc., et on y parvient sans peine à l'aide de la formule (6), en la comparant pour $m = n$, avec la formule d'interpolation de Lagrange.

Pour $m = n$, en effet, la formule (6) donne à l'expression d'une

fonction du $n^{ième}$ degré, par les valeurs qu'elle reçoit des valeurs de la variable $x = x_0, x_1, x_2, .., x_n$, la forme que voici :

$$F(x) = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_1(X) + \ldots$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_n(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_n(X).$$

La formule de Lagrange exprime la même fonction par la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots}\,F(x_i).$$

L'identité de ces deux expressions, quelles que puissent être les valeurs de $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$,..., $F(x_n)$, exige que les termes qui ont ces fonctions pour facteurs, soient les mêmes dans l'une et dans l'autre. Si donc on compare les termes qui multiplient $F(x_i)$, on aura la relation

$$\frac{(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots}$$

$$= \frac{\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^0(x_i)\,\theta^2(x_1)}\,\psi_0(X) + \frac{\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_1(X) + \ldots$$

$$+ \frac{\psi_n(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_n(X).$$

Si l'on fait $X = x_y$, pourvu que y ne soit pas égal à i, on obtient

$$0 = \frac{\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_0(x_y) + \frac{\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_1(x_y) + \ldots$$
$$+ \frac{\psi_n(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_n(x_y).$$

Par l'introduction du facteur $\frac{\theta(x_y)}{\theta(x_i)}$ on peut écrire cette expression de la manière suivante :

$$0 = \frac{\psi_0(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_0(x_y)\,\theta(x_y)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \frac{\psi_1(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_y)\,\theta(x_y)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \ldots$$
$$+ \frac{\psi_n(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_y)\,\theta^2(x_y)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

Faisant au contraire $X = x_i$, nous aurons

$$1 = \frac{\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \frac{\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)} + \ldots + \frac{\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

§ VI.

Ces équations, réunies aux équations (5), établissent une propriété remarquable des fonctions déterminées par la formule

$$\frac{\psi_m(x)\,\theta(x)}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}}.$$

Désignons ces fonctions par $\Phi_m(x)$, les équations construites tout à l'heure nous donneront

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Phi_m(x_i)\,\Phi_m(x_y) = 0,$$

tant que y diffère de i; et

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Phi_m(x_i)\,\Phi_m(x_y) = 1,$$

pour $y = i$. D'après la forme de la fonction $\Phi_m(x)$ et les équations (5), il est aisé de remarquer que

$$\sum_{i=0}^{i=n} \Phi_m(x_i)\,\Phi_{m'}(x_i) = 0 \quad \text{ou} \quad = 1,$$

selon que m' différera de m, ou sera égal à m. Car la somme dont il s'agit devient, par la substitution des valeurs de $\Phi_m(x)$, $\Phi_{m'}(x)$,

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\psi_{m'}(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_{m'}^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}}.$$

Or, d'après les équations (5), le numérateur s'annule si m' n'est pas égal à m; et si $m' = m$, il devient égal au dénominateur, ce qui réduit la fonction à l'unité

Ces propriétés conduisent à une autre que possède encore la fonction

$$\Phi_m(x) = \frac{\psi_m(x)\,\theta(x)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}},$$

composée avec les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, etc., qui servent de dénominateurs aux fractions convergentes déduites du développement de la fonction $\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$ en une fraction continue de la forme

$$q_0 + \cfrac{L'}{q_1 + \cfrac{L''}{q_2 + \ddots}}$$

Si de toutes les valeurs de la fonction $\Phi_m(x)$, *obtenues en faisant* $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ *et* $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, *on compose le carré*

$$\begin{array}{llll}
\Phi_0(x_0), & \Phi_0(x_1), & \Phi_0(x_2), \ldots, & \Phi_0(x_n),\\
\Phi_1(x_0), & \Phi_1(x_1), & \Phi_1(x_2), \ldots, & \Phi_1(x_n),\\
\Phi_2(x_0), & \Phi_2(x_1), & \Phi_2(x_2), \ldots, & \Phi_2(x_n),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\Phi_n(x_0), & \Phi_n(x_1), & \Phi_n(x_2), \ldots, & \Phi_n(x_n),
\end{array}$$

la somme des carrés des termes d'une rangée quelconque, horizontale ou verticale, sera égale à l'unité: la somme des produits des termes correspondants de deux rangées horizontales ou verticales sera égale à zéro.

La construction de carrés de cette espèce fait le sujet d'un Mémoire d'Euler intitulé : *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (N. Comm., t. XV).

§ VII.

Les équations (5) démontrent encore facilement une propriété particulière aux fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x), \ldots,$$

comparées à toutes les fonctions de même degré et de même coefficient de la plus haute puissance de x : pour ces fonctions les

sommes

$$\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i),\quad \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i),\quad \sum_{i=0}^{i=n} \psi_3^2(x_i)\,\theta^2(x_i),\ldots$$

ont la plus petite valeur possible.

En effet, comme les fonctions $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x),\ldots$, $\psi_m(x)$ sont respectivement des degrés 0, 1, $2,\ldots$, m, toute fonction entière V du degré m peut être exprimée ainsi :

$$V = A\psi_0(x) + B\psi_1(x) + C\psi_2(x) + \ldots + H\psi_m(x).$$

Mais ici il faut prendre $H = 1$, puisqu'on suppose que le coefficient de x^m est le même dans V et dans $\psi_m(x)$. On aura dans cette hypothèse

$$V = A\psi_0(x) + B\psi_1(x) + C\psi_2(x) + \ldots + \psi_m(x).$$

Il s'agit de trouver les valeurs des coefficients A, B, C, etc., qui rendent un minimum la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} V^2\theta^2(x_i) = \sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]^2\theta^2(x_i).$$

Le procédé connu du calcul différentiel nous donne les équations suivantes :

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]\,\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]\,\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \ldots + \psi_m(x_i)]\,\psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0.$$

. . . .

Les équations (5) les réduisent à un seul terme

$$2A\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)=0,$$

$$2B\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)=0,$$

$$2C\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i)=0.$$

. . . .

d'où l'on tire

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ldots.$$

Ainsi les conditions du minimum de la somme $\sum_{i=0}^{i=n}V^2\theta^2(x_i)$, quand V est de la forme

$$V=A\psi_0(x)+B\psi_1(x)+C\psi_2(x)+\ldots+\psi_m(x)$$

sont

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ldots,$$

et, par suite,

$$V=\psi_m(x).$$

On démontre encore sans difficulté que si l'on emploie la formule (6)

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_0(X)+\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_1(X)+\ldots$$

$$+\frac{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n}\psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_m(X),$$

à déterminer par approximation une fonction quelconque $F(X)$, on obtiendra pour l'exprimer une fonction entière du degré m telle, que la somme des carrés des différences entre les valeurs de cette fonction entière et les valeurs correspondantes de $F(x)$ pour $x = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, multipliés chacun par $\theta^2(x_0)$, $\theta^2(x_1)$, $\theta^2(x_2)$, etc., respectivement, sera un minimum.

Représentons effectivement la fonction cherchée sous la forme

$$A\psi_0(X) + B\psi_1(X) + C\psi_2(X) + \ldots + H\psi_m(X),$$

et cherchons les valeurs des coefficients A, B, C,..., H pour lesquelles la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n}[F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]^2\,\theta^2(x_i)$$

sera un minimum. Nous trouverons les équations

$$2\sum_{i=0}^{i=n}[F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\,\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n}[F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\,\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n}[F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\,\psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

. . . .

$$2\sum_{i=0}^{i=n}[F(x_i) - A\psi_0(x_i) - B\psi_1(x_i) - C\psi_2(x_i) - \ldots - H\psi_m(x_i)]\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0.$$

En vertu des relations (5), ces équations se réduisent à la forme

$$2\sum_{i=0}^{i=n}F(x_i)\,\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i) - 2A\sum_{i=0}^{i=n}\psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\,\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i) - 2B\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\,\psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i) - 2C\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

. . . .

$$2\sum_{i=0}^{i=n} F(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i) - 2H\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$B = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

. . . .

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

En reportant ces valeurs dans l'expression

$$A\psi_0(X) + B\psi_1(X) + C\psi_2(X) + \ldots + H\psi_m(X),$$

nous trouvons, conformément à ce qui a été avancé, que la formule cherchée pour $F(X)$ est précisément

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_1(X)$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_2(X) + \ldots + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\,F(x_i)}{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\,\psi_m(X).$$

Extrait du tome III des *Outchenia Zapiski* (*Mémoires savants*) de l'Académie impériale des Sciences, pour la 1re et la 3e classe.

SUR

DEUX INTÉGRALES DÉFINIES DOUBLES;

PAR M. BESGE.

Soient a et b deux constantes, et x, y deux variables continues de 0 à 1. Posons

$$\alpha = \frac{\sqrt{xy(1-y)}}{(1+\sqrt{1+ax})\sqrt{1+by}}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{y(1-y)(1-x)}}{1+\sqrt{1+ax}},$$

et

$$\gamma = \frac{\sqrt{xy(1-y)}}{(1+\sqrt{1+bx})\sqrt{1+ay}}, \qquad \delta = \frac{\sqrt{y(1-y)(1-x)}}{1+\sqrt{1+bx}},$$

expressions dont les deux dernières se déduisent des deux premières par une simple permutation des constantes a et b.

Je trouve que les deux intégrales définies doubles

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\alpha, \beta)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}}$$

et

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\gamma, \delta)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}},$$

sont égales entre elles, quelle que soit la fonction f, pourvu cependant qu'elle soit telle, que les deux intégrales citées aient un sens précis et représentent en géométrie des volumes finis.

On peut démontrer ce théorème de plusieurs manières. Bornons-nous à indiquer le développement des fonctions $f(\alpha, \beta)$, $f(\gamma, \delta)$ suivant les puissances des variables α, β ou γ, δ.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

SIXIÈME ARTICLE.

Dans les formules que nous avons données jusqu'ici, on ne considère qu'un seul mode de partition du nombre auquel on rapporte les calculs. Ce mode de partition change, il est vrai, d'une formule à une autre; mais il est unique pour chacune d'elles. Voici maintenant une formule d'un genre nouveau, où l'on aura à s'occuper à la fois de deux modes de partition distincts.

Soit m un nombre impair quelconque. Décomposons d'abord son double en une somme de deux entiers impairs, de manière à avoir

$$2m = m' + m'',$$

m' et m'' étant impairs et positifs. Puis, décomposons le nombre m lui-même dans la somme d'un entier impair et d'un entier pair pour lequel nous mettrons en évidence la puissance de 2 qui le divise; en d'autres termes, faisons

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

m_1 et m_2 étant deux entiers positifs impairs. Et ces deux modes de partition ainsi établis, décomposons de toutes les manières possibles m, m', m'', m_1, m_2 en deux facteurs, naturellement impairs, en prenant

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'', \quad m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2.$$

C'est aux diviseurs ainsi obtenus que s'appliquera notre formule.

Désignons, en effet, par $F(x)$ une fonction de x impaire, ou plutôt

telle, que l'on ait

$$F(o) = o,$$

et, en outre,

$$F(-x) = -F(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage. La somme triple

$$\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [F(d'+d'') + F(d'-d'')] \right\},$$

étendue à tous les diviseurs d', d'' appartenant aux groupes successifs m', m'' fournis par l'équation

$$2m = m' + m'',$$

sera une des quantités que nous mettrons en œuvre. Il faudra y joindre la somme simple

$$\sum F(2d),$$

qui porte sur les diviseurs d du nombre fondamental m, et une somme double

$$\sum\sum \rho(m_2) F(2d_1),$$

que l'on pourrait écrire, avec plus de netteté peut-être,

$$\sum \left[\rho(m_2) \sum F(2d_1) \right]:$$

on désigne ici par $\rho(m_2)$ le nombre des décompositions de $2m_2$ en une somme de deux carrés impairs; ou, autrement dit, l'on fait

$$\rho(m_2) = \sum (-1)^{\frac{d_2-1}{2}}:$$

j'ai déjà employé cette notation dans les articles précédents. Pour effectuer la somme double indiquée

$$\sum\sum \rho(m_2) F(2d_1),$$

il faut prendre successivement les divers groupes d'entiers impairs m_1, m_2, pour lesquels

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

former pour chacun de ces groupes la somme

$$\sum F(2d_1),$$

relative aux diviseurs de m_1, et faire le total des produits

$$\rho(m_2) \sum F(2d_1).$$

Cela posé, je dis que la somme triple dont nous avons parlé d'abord est égale à la somme simple augmentée de quatre fois la somme double. En d'autres termes, je dis que l'on a

$$(\mathrm{L}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [F(d'+d'') + F(d'-d'')] \right\} \\ &= \sum F(2d) + 4 \sum\sum \rho(m_2) F(2d_1). \end{aligned} \right.$$

Soit, par exemple, $m = 3$. On aura trois décompositions de $2m$ sous la forme $m' + m''$, savoir

$$6 = 1 + 5, \quad 6 = 3 + 3, \quad 6 = 5 + 1,$$

ce qui donne pour d', d'' les valeurs conjuguées suivantes :

$$d' = 1, \quad d'' = 1; \quad d' = 1, \quad d'' = 5;$$

$$d' = 1, \quad d'' = 1; \quad d' = 1, \quad d'' = 3; \quad d' = 3, \quad d'' = 1; \quad d' = 3, \quad d'' = 3;$$

$$d' = 1, \quad d'' = 1; \quad d' = 5, \quad d'' = 1.$$

Comme, par la nature de la fonction F, on a

$$F(0) = 0, \quad F(-2) = -F(2), \quad F(-4) = -F(4),$$

la valeur de la somme triple est ici

$$F(6) + 5F(2).$$

Or c'est bien ce que nous donne le second membre de la formule (L); car, d'une part, on a

$$\sum F(2d) = F(6) + F(2);$$

et, d'autre part, 3 n'étant susceptible que d'une seule décomposition de la forme

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

savoir

$$3 = 1 + 2 . 1,$$

on ne peut faire que $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, d'où

$$4 \sum\sum \rho(m_2) F(2d_1) = 4\rho(1) F(2) = 4F(2);$$

la somme est $F(6) + 5F(2)$, comme il le fallait.

En prenant

$$F(x) = x,$$

la formule (L) nous donne

$$\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \sum d' \right\} = \sum d + 4 \sum \left[\rho(m_2) \sum d_1 \right].$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum \zeta_1(m') \rho(m'') = \zeta_1(m) + 4 \sum \zeta_1(m_1) \rho(m_2),$$

en observant que

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} = \rho(m''),$$

d'après une convention faite plus haut, et en représentant, suivant notre coutume, par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de tout entier m.

La formule

$$\sum \zeta_1(m') \rho(m'') = \zeta_1(m) + 4 \sum \zeta_1(m_1) \rho(m_2)$$

exprime le théorème que voici :

« Soit A le nombre des décompositions de l'octuple d'un nombre
» impair m sous la forme

$$8m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(u^2 + v^2),$$

» x, y, z, t, u, v étant des entiers impairs positifs. Dans la même hy-
» pothèse sur x, y, z, t, u, v, soit B le nombre des décompositions du
» quadruple du même nombre sous la forme

$$4m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2^\alpha(u^2 + v^2),$$

» où l'exposant α est à volonté. On aura

$$\text{A} = 4\text{B} + \zeta_1(m). \text{ »}$$

Souvenons-nous, en effet, que $\zeta_1(m)$ est le nombre des décompositions de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs, comme $\rho(m)$ est le nombre des décompositions de $2m$ en une somme de deux carrés impairs. Alors nous conclurons sans peine de l'équation

$$8m = 4m' + 2.2m'',$$

que

$$\text{A} = \sum \zeta_1(m')\,\rho(m''):$$

de même, à l'aide de l'équation

$$4m = 4m_1 + 4.2^{\alpha-1}m_2 = 4m_1 + 2^\alpha.2m_2,$$

nous obtiendrons

$$\text{B} = \sum \zeta_1(m_1)\,\rho(m_2).$$

De là resulte immédiatement le théorème que nous venons d'énoncer.

On pourrait arriver encore à d'autres résultats curieux en prenant

$$\text{F}(x) = x^{2\mu+1},$$

et surtout en posant

$$\text{F}(x) = \sin xt,$$

où t désigne une constante arbitraire. Mais je me contente de trans-

crire l'équation

$$2\sum\left\{\sum\sin d't\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\cos d''t\right\}$$
$$=\sum\sin(2dt)+4\sum\left[\rho(m_2)\sum\sin(2d_1t)\right]$$

à laquelle cette dernière hypothèse conduit. Nous reviendrons un jour sur ces détails : passons à une autre formule.

Cette fois encore nous opérerons sur un nombre impair m, et après avoir posé, comme tout à l'heure, de toutes les manières possibles

$$m=m_1+2^{\alpha_3}m_2,\quad m_1=d_1\delta_1,\quad m_2=d_2\delta_2,$$

$d_1, \delta_1, d_2, \delta_2$ étant des entiers positifs impairs, nous ferons

$$m=m'+m''+m''',$$

m', m'', m''' étant aussi impairs et positifs, de sorte que le nombre m se trouvera décomposé en trois parties, et non plus en deux parties seulement. Nous introduirons d'ailleurs les diviseurs de m, m', m'', m''' en posant

$$m=d\delta,\quad m'=d'\delta',\quad m''=d''\delta'',\quad m'''=d'''\delta''';$$

et c'est dans une fonction $F(x)$ semblable à celle de la formule (L), c'est-à-dire remplissant les conditions

$$F(0)=0,\quad F(-x)=-F(x),$$

que nous allons les faire entrer.

Il faut se représenter d'un côté la somme quadruple

$$\sum\left\{\sum\sum\sum[F(d'+d''+d''')+F(d'-d''-d''')-F(d'+d''-d''')-F(d'-d''+d''')]\right\}$$

relative aux diviseurs d', d'', d''' des nombres impairs conjugués m', m'', m''' dont la somme est égale à m; d'un autre côté, il faut prendre la somme double

$$\sum\sum\zeta_1(m_2)F(d_1)$$

où $\zeta_1(m_2)$ désigne la somme des diviseurs de m_2, et qui concerne le mode de partition marqué par l'équation

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

Je dis qu'en ajoutant huit fois la somme quadruple, à vingt-quatre fois la somme double, on obtiendra un total équivalent à la somme simple

$$\sum (d^2 - 1)\,\mathrm{F}(d),$$

qui ne porte que sur les diviseurs du nombre m.

En d'autres termes, on a

$$(\mathrm{M})\quad \left\{\begin{aligned} &8\sum\left\{\sum\sum\sum\left[\begin{array}{l} \mathrm{F}(d' + d'' + d''') + \mathrm{F}(d' - d'' - d''') \\ - \mathrm{F}(d' + d'' - d''') - \mathrm{F}(d' - d'' + d''') \end{array}\right]\right\} \\ &= \sum (d^2 - 1)\,\mathrm{F}(d) - 24\sum\sum \zeta_1(m_2)\,\mathrm{F}(d_1). \end{aligned}\right.$$

Ainsi, par exemple, en prenant

$$\mathrm{F}(x) = x^3,$$

on arrive à la formule

$$192\sum \zeta_1(m')\zeta_1(m'')\zeta_1(m''') + 24\sum \zeta_3(m_1)\zeta_1(m_2) = \zeta_5(m) - \zeta_3(m),$$

d'où l'on peut tirer un théorème sur la décomposition des nombres en douze carrés, savoir : « Soient m un entier impair, G le nombre des » décompositions de $4m$ en une somme de douze carrés impairs, et H » le nombre des décompositions de $8m$ en une somme de huit carrés » impairs, formant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le » produit d'une somme de quatre carrés impairs par une puissance » de 2. On aura

$$8\mathrm{G} + \mathrm{H} = \frac{1}{24}\left[\zeta_5(m) - \zeta_3(m)\right]. \text{ »}$$

En prenant

$$\mathrm{F}(x) = \sin xt,$$

où t désigne une constante arbitraire, et en posant pour tout nombre

impair $m = d\delta$,

$$\sum \sin dt = \psi(m),$$

on trouverait

$$32 \sum \psi(m')\psi(m'')\psi(m''') = \sum (1 - d^2) \sin dx + 24 \sum \psi(m_1)\zeta_1(m_2).$$

Et ainsi de suite.

Au reste il est aisé de ramener la formule (M) à une autre qui ne dépendra plus que d'un seul mode de partition du nombre m, savoir du mode indiqué par l'équation

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2,$$

et en même temps de réduire à une somme triple la somme quadruple que cette formule contient. Rien ne nous empêche en effet de prendre

$$m''' = m_1, \quad d''' = d_1, \quad \delta''' = \delta_1,$$

pourvu que nous prenions aussi

$$2^{\alpha_2} m_2 = m' + m''.$$

Cela admis, faisons pour chaque valeur de m_1, considérée comme fixe,

$$F(x + d_1) - F(x - d_1) = f(x),$$

et à cause de

$$F(-x) = -F(x),$$

nous aurons

$$f(-x) = f(x),$$

de sorte que la formule (a) de notre second article sera applicable à la fonction $f(x)$. D'après cela, il est aisé de voir que le résultat des sommations relatives à d' et d'' effectuées sur l'expression

$$F(d' + d'' + d''') + F(d' - d'' - d''') - F(d' + d'' - d''') - F(d' - d'' + d'''),$$

ou plutôt sur l'expression équivalente

$$f(d' + d'') - f(d' - d''),$$

est

$$2^{\alpha_2-1}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-2F(d_1)],$$

de sorte que la somme quadruple de la formule (M) peut être remplacée par la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2-1}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-2F(d_1)]\right\},$$

que l'on peut diviser en deux parties

$$\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2-1}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\right\}$$

et

$$\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2 F(d_1)\right\},$$

dont la seconde doit être retranchée de la première : cette seconde partie peut à son tour s'écrire plus simplement, et sous forme de somme double, comme il suit

$$\sum\sum 2^{\alpha_2}\zeta_1(m_2)F(d_1).$$

En résumé, la formule (M) peut être changée en celle-ci :

$$(\text{N})\quad \begin{cases} 4\sum\left\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2[F(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+F(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\right. \\ =\sum(d^2-1)F(d)+8\sum\sum(2^{\alpha_2}-3)\zeta_1(m_2)F(d_1), \end{cases}$$

qui n'est plus relative qu'au seul mode de partition

$$m=m_1+2^{\alpha_2}m_2.$$

C'est à un mode de partition tout semblable que se rapportent les formules de notre troisième article : seulement, au lieu d'indices, on a employé là des accents et l'on a posé

$$m=m'+2^{\alpha''}m''.$$

Ainsi, en appliquant notre notation actuelle à la formule (F) de l'ar-

ticle cité, on devra l'écrire

$$\text{(F)}\qquad 2\sum\Big\{\sum\sum f(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-f(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\Big\}=\sum(\delta-d)f(d).$$

Comme la fonction $f(x)$ est paire, on peut prendre

$$f(x)=x\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant la même fonction que ci-dessus. La formule (F) nous donne alors

$$2\sum\Big\{\sum\sum d_1[\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\Big\}$$
$$-2\sum\Big\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2[\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\Big\}$$
$$=\sum(d\delta-d^2)\mathrm{F}(d),$$

ou bien

$$4\sum\Big\{\sum\sum d_1[\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\Big\}$$
$$-4\sum\Big\{\sum\sum 2^{\alpha_2}d_2[\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)+\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)]\Big\}$$
$$=2\sum(m-d^2)\mathrm{F}(d),$$

en multipliant par 2 et en remplaçant $d\delta$ par m.

Ajoutons maintenant à l'équation (N) celle que nous venons d'écrire, et il nous viendra cette formule nouvelle qu'il était bon d'indiquer :

$$\text{(O)}\qquad \left\{\begin{aligned}&4\sum\Big\{\sum\sum d_1[\mathrm{F}(d_1-2^{\alpha_2}d_2)-\mathrm{F}(d_1+2^{\alpha_2}d_2)]\Big\}\\&=\sum(2m-1-d^2)\mathrm{F}(d)+8\sum\sum(2^{\alpha_2}-3)\zeta_1(m_2)\mathrm{F}(d_1).\end{aligned}\right.$$

Les deux équations (N) et (O) forment un groupe assez curieux.

Puisqu'il a été question tout à l'heure du mode de partition marqué par l'équation

$$m=m'+m''+m''',$$

où m est un nombre impair donné qu'on décompose de toutes les ma-

nières possibles dans la somme de trois nombres impairs, je terminerai cet article en donnant encore une formule qui se rapporte à ce mode de partition.

Je continue à poser

$$m = d\delta,\quad m' = d'\delta',\quad m'' = d''\delta'',\quad m''' = d'''\delta''',$$

et je désigne par $F(x, y)$ une fonction telle, que l'on ait

$$F(0, y) = 0,\ F(x, 0) = 0,\ F(-x, y) = -F(x, y) = F(x, -y),$$

en un mot une fonction impaire. Cela étant, je dis qu'on a entre deux sommes quadruples l'égalité suivante

$$(\mathrm{P})\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum\sum d'''\left[\begin{array}{l} F(d'+d''',\ d'+d'') + F(d'-d''',\ d'+d'') \\ -F(d'+d''',\ d'-d'') - F(d'-d''',\ d'-d'') \end{array}\right]\right\} \\ =&\sum\left\{\sum\sum\sum d'''\left[\begin{array}{l} F(d'+d'',\ d'+d''') + F(d'+d'',\ d'-d''') \\ -F(d'-d'',\ d'+d''') - F(d'-d'',\ d'-d''') \end{array}\right]\right\}, \end{aligned}\right.$$

où les sommes sont prises pour tous les diviseurs d', d'', d''' appartenant aux groupes conjugués successifs m', m'', m'''.

Pour bien comprendre la formule (P), il faut observer qu'en permutant d', d'', d''', à volonté, dans un quelconque des deux membres qui la composent, on n'en altère pas la valeur, parce que d', d'' et d''' jouent le même rôle dans l'équation fondamentale

$$m = d'\delta' + d''\delta'' + d'''\delta'''.$$

Aussi n'est-ce point par une telle permutation (qui ne pourrait fournir qu'une identité insignifiante) que l'on passe du premier membre au second, mais par le changement des valeurs de x en celles de y, et des valeurs de y en celles de x, dans la fonction $F(x, y)$.

Si donc on posait

$$F(x, y) - F(y, x) = \psi(x, y),$$

la formule (P) pourrait s'écrire plus simplement

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left\{\sum\sum\sum d'''\left[\psi(d'+d''',\ d'+d'') + \psi(d'-d''',\ d'+d'')\right]\right\} \\ =&\sum\left\{\sum\sum\sum d'''\left[\psi(d'+d''',\ d'-d'') + \psi(d'-d''',\ d'-d'')\right]\right\}; \end{aligned}\right.$$

mais alors la fonction $\psi(x, y)$ remplirait les conditions suivantes :

$$\psi(o, y) = o, \quad \psi(x, o) = o,$$

$$\psi(-x, y) = -\psi(x, y) = \psi(x, -y), \quad \psi(y, x) = -\psi(x, y).$$

Prenons, dans la formule (P),

$$F(x, y) = \sin xt \sin yz,$$

t et z étant des constantes arbitraires. Il nous viendra

$$\sum \left\{ \sum\sum\sum d''' \sin d' t \cos d' z \sin d'' z \cos d''' t \right\}$$
$$= \sum \left\{ \sum\sum\sum d''' \sin d' z \cos d' t \sin d'' t \cos d''' z \right\}.$$

Cet exemple suffira pour faire comprendre le parti qu'on peut tirer de la formule (P).

MÉMOIRE
SUR
LES INTÉGRALES COMMUNES A PLUSIEURS PROBLÈMES DE MÉCANIQUE RELATIFS AU MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE;

PAR M. E. ROUCHÉ,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur au lycée Charlemagne.

Introduction.

1. Tous les géomètres connaissent les belles recherches de M. Bertrand sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique. Le Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 12 mai 1851, et inséré dans le tome XVII du *Journal* de M. Liouville, renferme trois parties, suivant que le point considéré se meut dans un plan, sur une surface ou dans l'espace indéfini. C'est à la seconde partie que se rapporte mon travail.

M. Bertrand a démontré cette proposition remarquable :

Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale indépendante du temps et commune à plusieurs problèmes, il faut que la surface soit applicable sur une surface de révolution.

Mais les conclusions relatives aux intégrales communes qui dépendent du temps sont loin d'être aussi simples. Il semble qu'on doive considérer deux formes d'intégrales qui imposent à la surface, l'une la condition d'être applicable sur une surface de révolution, l'autre celle d'avoir, par rapport à une série de lignes géodésiques coordonnées et à leurs trajectoires orthogonales, un élément linéaire de la forme

$$ds^2 = adm^2 + bdn^2,$$

où b est une constante et a l'expression compliquée

$$a = \frac{1}{\psi_1(m) + F(n).\psi_2(m)}$$

qui renferme trois fonctions arbitraires.

Je me propose de montrer qu'on peut encore, dans ce second cas relatif aux intégrales qui dépendent du temps, tout réduire à un théorème unique, analogue au précédent, et dont voici l'énoncé :

Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale dépendante du temps et commune à plusieurs problèmes, il faut que le carré de la distance de deux points infiniment voisins, par rapport à une certaine série de lignes géodésiques coordonnées et à leurs trajectoires orthogonales, soit de la forme

$$ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{R - k\omega},$$

où k est une constante et R *une fonction de la variable r seule.*

Les surfaces pour lesquelles ces conditions sont remplies, ont un degré de généralité qui n'excède pas celui des surfaces de révolution; le mouvement de la génératrice est réglé par des constantes.

Pour que mon travail présente un ensemble complet, je reprendrai entièrement le problème relatif au mouvement d'un point placé sur une surface; il y a peut-être quelque intérêt à retrouver d'une autre manière le premier théorème.

Je diviserai cette étude en cinq paragraphes, dont voici les titres :

1°. *Notions empruntées à la théorie des surfaces;*

2°. *Équations du mouvement;*

3°. *Calculs communs aux deux sortes d'intégrales;*

4°. *Intégrales indépendantes du temps;*

5°. *Intégrales qui dépendent du temps.*

2. Avant de commencer, il convient de dire un mot sur la forme des intégrales.

Le temps, ne figurant dans les équations du mouvement que par sa différentielle, doit entrer dans les intégrales ajouté à une constante; par suite, dans les équations qui font connaître en fonction du temps les coordonnées et les composantes de la vitesse du point mobile, l'une des constantes est combinée au temps par voie d'addition; et lorsqu'on résoudra ces équations par rapport aux constantes, en éliminant pour cela toutes les constantes excepté une, le temps ne subsistera que si la constante non éliminée est celle dont il est inséparable.

Dans ce dernier cas, en cherchant la valeur de cette contante α, le calcul donnera forcément la valeur de $\alpha + t$. Toutes les intégrales seront donc indépendantes du temps et de la forme

$$\alpha = \mathrm{F},$$

excepté une qui aura pour expression

$$\alpha + t = \mathrm{F},$$

F étant une fonction qui ne contient pas le temps, mais seulement les coordonnées du point et leurs dérivées. Il résulte de là que l'on peut toujours représenter une intégrale quelconque par

$$\alpha = \mathrm{F},$$

en se rappelant que $\frac{d\alpha}{dt}$ est o ou -1.

I.

Notions empruntées à la théorie des surfaces.

3. On peut déterminer la position d'un point sur une surface au moyen de deux séries de lignes tracées sur cette surface. AQ_1 et AQ_2 étant deux lignes, l'une de la première série, l'autre de la seconde, une ligne quelconque P_1M de la deuxième série sera définie par une fonction q_1 de l'arc AP_1 intercepté sur la ligne fixe AQ_1, et une ligne quelconque P_2M de la première série sera définie par une fonction q_2 de l'arc AP_2 intercepté sur AQ_2. Les variables q_1 et q_2, qui peuvent ne pas différer des arcs AP_1 et AP_2 eux-mêmes, seront les *coordonnées curvilignes* du point M.

Pour achever de définir un tel système de coordonnées, il faut fixer encore le sens des q_1 et q_2 positifs. On y parvient aisément par la considération de la *normale extérieure*.

Une surface partage en général l'espace entre deux régions, dont l'une, d'ailleurs arbitrairement choisie, est dite *extérieure*, tandis que l'autre prend le nom d'*intérieure*. Pour tous les points d'une même région, le premier membre de l'équation de la surface a le même signe,

et ce signe change quand on passe d'une région à l'autre. On dispose ordinairement du premier membre de l'équation de manière qu'il soit positif pour les points de la région qu'on veut considérer comme extérieure.

Dès lors, si AN est la portion de la normale en A à la surface qui est située dans la région extérieure, on convient de compter les parties positives AQ_1, AQ_2, de telle façon, que ces deux directions AQ_1 et AQ_2 et la normale extérieure AN soient respectivement situées par rapport au point A, comme le sont ordinairement les parties positives des trois axes de coordonnées rectilignes, considérées dans l'ordre OX, OY, OZ, par rapport au point O. En d'autres termes, la partie positive AQ_2 est vue à droite de la partie positive AQ_1 par un observateur placé le long de AN, les pieds en A, la tête en N.

4. Cela posé, les coordonnées x, y, z des divers points de la surface, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, sont des fonctions des deux coordonnées curvilignes q_1 et q_2; et l'élément linéaire MM'

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

d'une courbe quelconque C tracée sur la surface s'obtiendra en fonction de q_1 et de q_2 en remplaçant dx, dy, dz respectivement par

$$\frac{dx}{dq_1} dq_1 - \frac{dx}{dq_2} dq_2,$$

$$\frac{dy}{dq_1} dq_1 + \frac{dy}{dq_2} dq_2,$$

$$\frac{dz}{dq_1} dq_1 + \frac{dz}{dq_2} dq_2.$$

On trouve ainsi

$$(1) \qquad ds^2 = E dq_1^2 + 2 F dq_1 dq_2 + G dq_2^2.$$

en posant, pour abréger,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} E &= \left(\frac{dx}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_1}\right)^2, \\ F &= \frac{dx}{dq_1} \cdot \frac{dx}{dq_2} + \frac{dy}{dq_1} \cdot \frac{dy}{dq_2} + \frac{dz}{dq_1} \frac{dz}{dq_2}, \\ G &= \left(\frac{dx}{dq_2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_2}\right). \end{aligned} \right.$$

5. Les fonctions E, F, G ont des valeurs indépendantes de la position du système rectiligne auxiliaire OX, OY, OZ, qui a servi à les obtenir; car l'expression de l'élément ds ne doit pas en dépendre. Elles se prêtent à une interprétation géométrique simple.

Selon que l'on fait varier seulement q_1 ou q_2, l'arc $ds = MM'$ se confond avec l'arc $MM_1 = ds_1$ ou $MM_2 = ds_2$ de l'une des deux lignes coordonnées du point M, et l'on a

$$(3) \qquad ds_1 = \sqrt{E}\, dq_1, \qquad ds_2 = \sqrt{G}\, dq_2.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par θ l'angle des côtés ds_1, ds_2, le parallélogramme infiniment petit $MM_1 M'M_2$ donne

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2\, ds_1\, ds_2 \cos\theta,$$

ou, à cause des valeurs (1) et (3),

$$(4) \qquad F^2 = EG \cos\theta.$$

6. Dans le cas de deux systèmes (q_1), (q_2) orthogonaux, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \cos\theta = 0, \quad F = 0, \\ ds^2 = E\, dq_1^2 + G\, dq_2^2. \end{cases}$$

7. Lorsque deux courbes ont un élément commun ds, les deux éléments qui suivent ds sur ces courbes respectives forment un angle infiniment petit dv que M. Liouville nomme angle de contingence relatif; le rapport $\frac{dv}{ds}$ mesure la courbure ou déviation relative de ces deux courbes, et le rapport inverse mesure, par analogie, le rayon de cette courbure.

En particulier, M. Liouville a donné le nom de *courbure géodésique* à la courbure relative d'une courbe $mnp\ldots$, tracée sur une surface, et de la *ligne géodésique* ou *minima* qui a même tangente.

Supposons les éléments successifs mn, np, etc., égaux entre eux et à l'unité de longueur; prolongeons mn de $nt = mn$, projetons t en q sur la surface et joignons tp, nq, pq. La droite nt, faisant un angle infiniment petit avec la surface, est sensiblement égale à sa projection nq.

Or nq est le second élément de la ligne géodésique $mnq\ldots$, tangente à $mnp\ldots$, et osculatrice de la section faite dans la surface par le plan mnp. Donc le triangle rectangle infinitésimal tpq donne par ses trois côtés tp, tq, qp : 1° la courbure absolue de $mnp\ldots$, qui est aussi celle de la section oblique faite dans la surface par le plan mnp des deux premiers éléments; 2° la courbure absolue de la section normale correspondante mnq; 3° la courbure géodésique de $mnp\ldots$. Par suite, si l'on désigne par θ l'angle tpq qui n'est autre que l'angle du plan osculateur de $mnp\ldots$, avec le plan tangent, on aura

$$\frac{tq}{tp} = \sin\theta, \qquad \text{et} \qquad \frac{qq}{tp} \qquad \text{ou} \qquad \frac{R}{\rho} = \cos\theta.$$

La première relation exprime le théorème de Meusnier; la seconde fournit la valeur du rayon de courbure géodésique ρ.

8. Remarquons que la courbure géodésique d'une courbe en un quelconque de ses points est égale à la courbure ordinaire de la projection de cette courbe sur le plan tangent en ce point.

Il résulte de là que, *si l'on suppose la surface découpée en rectangles infiniment petits par deux séries de lignes orthogonales* (q_1), (q_2), *on aura* (en projetant sur le plan tangent en M, c'est-à-dire sur les deux éléments MM_1, MM_2, et désignant par ρ_1 le rayon de courbure de la projection de la courbe P_1MM_2),

$$\frac{MM_2}{\rho_1} = \frac{M_1M'}{\rho_1 - MM_1} = \frac{M_1M' - MM_2}{-MM_1},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{M_1M' - MM_2}{MM_1 \cdot MM_2} \tag{6}$$

pour la courbure géodésique de la ligne coordonnée (q_1) *du point* M.

9. La formule (6) montre que les conditions

$$\frac{1}{\rho_1} = 0, \qquad M_1M' = MM_2$$

sont des conséquences l'une de l'autre. Donc :

Si une série de courbes (q_2) *tracées sur une surface sont telles, que les distances de deux courbes infiniment voisines* (q_2) *et* ($q_2 + dq_2$) *quelconques soient constantes, leurs trajectoires orthogonales* (q_1) *sont des lignes géodésiques.*

Et à l'inverse, *étant données sur une surface deux séries de lignes orthogonales* (q_1), (q_2), *si les lignes* (q_1) *sont géodésiques, deux courbes quelconques de l'autre série* (q_2) *seront équidistantes* (les distances étant comptées suivant les lignes géodésiques).

10. Il résulte de là que, si l'on prend pour lignes coordonnées des lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, on pourra indiquer la position d'une ligne géodésique coordonnée quelconque par l'arc m intercepté sur une trajectoire orthogonale déterminée à partir d'un point fixe de cette trajectoire, et une trajectoire orthogonale quelconque par la longueur commune n des lignes géodésiques comptée à partir de la trajectoire orthogonale fixe. Dans ce système, l'élément linéaire d'une courbe quelconque tracée sur la surface prendra la forme simple

$$ds^2 = dn^2 + \frac{1}{\mu} dm^2,$$

où μ désigne une fonction de m et de n.

11. Deux surfaces S et S' étant données, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles se composent de triangles égaux, et soient par suite applicables l'une sur l'autre, est qu'on puisse établir entre les divers points M et M' de ces deux surfaces une correspondance telle, qu'on ait toujours $ds = ds'$.

Or en désignant par σ l'arc du méridien d'une surface de révolution, et par θ l'angle compris entre un méridien quelconque et un méridien fixe, on a

$$ds^2 = d\sigma^2 + b^2 \varphi(\sigma)\, d\theta^2$$

pour l'élément linéaire d'une courbe quelconque tracée sur la surface. Si ρ est le rayon du parallèle, et z l'abscisse comptée sur l'axe de révolution, on aura ainsi

$$\rho = b\sqrt{\varphi(\sigma)}, \qquad z = \int d\sigma \sqrt{1 - \frac{b^2 \varphi'(\sigma)^2}{4\varphi(\sigma)}};$$

en sorte que, si la constante b est prise assez petite, la surface sera réelle.

Donc, *Si une surface est telle, que, par rapport à une certaine série de lignes géodésiques coordonnées* (ω), *et à leurs trajectoires orthogonales* (r), *l'élément linéaire d'une courbe quelconque est de la forme*

$$ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{R}, \tag{7}$$

R *étant une fonction de la variable* r *seule, la surface sera applicable sur une surface de révolution.*

Nous nous bornerons à ces notions qui nous sont seules nécessaires, en renvoyant aux *Disquisitiones circa superficies curvas* de Gauss, aux notes dont M. Liouville a enrichi l'*Analyse* de Monge, et au précieux Mémoire de M. O. Bonnet *sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIe Cahier).

II.

Équations du mouvement.

12. Soit M un point matériel dont la masse est prise pour unité, et qui se meut sur une surface, sous l'influence d'une force dont les composantes par rapport aux axes coordonnés des x, y, z sont X, Y, Z.

Lorsque aux variables x, y, z on substitue les paramètres q_1, q_2 des lignes coordonnées orthogonales qui découpent la surface en rectangles, la demi-force vive T a pour expression

$$T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}(Eq_1'^2 + Gq_2'^2), \tag{8}$$

où q_1', q_2' désignent les dérivées de q_1 et q_2 par rapport au temps; et les équations du mouvement sont, d'après les formules générales de la *Mécanique analytique*,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq_1'}\right) - \frac{dT}{dq_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq_2'}\right) - \frac{dT}{dq_2} = Q_2; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

avec les relations

$$(10)\quad \begin{cases} Q_1 = X\dfrac{dx}{dq_1} + Y\dfrac{dy}{dq_1} + Z\dfrac{dz}{dq_1}, \\ Q_2 = X\dfrac{dx}{dq_2} + Y\dfrac{dy}{dq_2} + Z\dfrac{dz}{dq_2}. \end{cases}$$

L'introduction de la valeur (8) de T donne aux équations du mouvement la forme définitive

$$(11)\qquad Eq''_1 + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq_1}q'^2_1 + \frac{dE}{dq_2}q'_1 q'_2 - \frac{1}{2}\frac{dG}{dq_1}q'^2_2 = Q_1,$$

$$(12)\qquad Gq''_2 + \frac{1}{2}\frac{dG}{dq_2}q'^2_2 + \frac{dG}{dq_1}q'_1 q'_2 - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq_2}q'^2_1 = Q_2.$$

III.

Calculs communs aux deux sortes d'intégrales.

13. Étant donnée une intégrale

$$(13)\qquad \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = F(q_1, q_2, q'_1, q'_2)$$

des équations du mouvement, on peut en général en déduire l'expression des forces qui produisent le mouvement, et, par suite, trouver le problème qui a conduit à cette intégrale. La solution de cette question suppose seulement que les composantes de la force puissent s'exprimer en fonction des coordonnées du point. Mais, dans certains cas, la méthode tombe en défaut; elle conduit pour les forces à des expressions indéterminées; ces cas sont les seuls où l'intégrale puisse convenir à plusieurs problèmes.

Entrons dans les détails.

14. En différentiant l'équation (13) par rapport à t, on a

$$0 \quad \text{ou} \quad +1 = \frac{d\alpha}{dq_1}q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2}q'_2 + \frac{d\alpha}{dq'_1}q''_1 + \frac{d\alpha}{dq'_2}q''_2,$$

et, en remplaçant q''_1, q''_2 par leurs valeurs tirées des équations du mouvement (11) et (12),

$$(A)\quad \begin{cases} 0 \quad \text{ou} \quad +1 = \dfrac{d\alpha}{dq_1}q'_1 + \dfrac{d\alpha}{dq_2}q'_2 \\ \qquad + \dfrac{1}{E}\dfrac{d\alpha}{dq'_1}\left[Q_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dq_1}q'^2_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq_1}q'^2_1 - \dfrac{dE}{dq_2}q'_1 q'_2\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{G}\dfrac{d\alpha}{dq'_2}\left[Q_2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq_2}q'^2_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dq_2}q'^2_2 - \dfrac{dG}{dq_1}q'_1 q'_2\right]; \end{cases}$$

Q_1 et Q_2, qui sont des fonctions de q_1 et de q_2, et qui dépendent des forces accélératrices, n'entrent qu'au premier degré.

Cette relation (A) ne contenant que t, q_1, q_2, q'_1, q'_2 auxquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires et indépendantes les unes des autres (car on peut se donner arbitrairement à une époque quelconque les coordonnées du point M et les composantes de sa vitesse), doit être *une identité*. On peut donc la différentier par rapport à q'_1 et q'_2, et former deux équations nouvelles, qui, renfermant aussi Q_1 et Q_2 au premier degré, permettront en général de déterminer la valeur de ces inconnues.

Avant de différentier, mettons l'égalité (A) sous la forme

$$0 = M + \frac{1}{E}\frac{d\alpha}{dq'_1}Q_1 + \frac{1}{G}\frac{d\alpha}{dq'_2}Q_2.$$

Dès lors, en différentiant successivement par rapport à q'_1 et q'_2, on trouve

$$0 = \frac{dM}{dq'_1} + \frac{1}{E}\frac{d^2\alpha}{dq'^2_1}Q_1 + \frac{1}{G}\frac{d^2\alpha}{dq'_2\,dq'_1}Q_2,$$

$$0 = \frac{dM}{dq'_2} + \frac{1}{E}\frac{d^2\alpha}{dq'_1\,dq'_2}Q_1 + \frac{1}{G}\frac{d^2\alpha}{dq'^2_2}Q_2.$$

Q_1 et Q_2 devant satisfaire à ces trois équations, auront des valeurs déterminées, à moins que deux de ces équations ne rentrent dans la troisième. Donc le seul cas où l'intégrale (13) puisse convenir à plusieurs problèmes est celui où les coefficients de Q_1 et de Q_2 dans les trois équations précédentes sont proportionnels, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\frac{\dfrac{d^2\alpha}{dq'^2_1}}{\dfrac{d\alpha}{dq'_1}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dq'_2\,dq'_1}}{\dfrac{d\alpha}{dq'_2}}, \qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dq'_1\,dq'_2}}{\dfrac{d\alpha}{dq'_1}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dq'^2_2}}{\dfrac{d\alpha}{dq'_2}}.$$

Les fonctions

$$\log\frac{d\alpha}{dq'_1} \quad \text{et} \quad \log\frac{d\alpha}{dq'_2}$$

ont alors les mêmes dérivées par rapport à q'_1 et q'_2; la différence de

ces logarithmes, c'est-à-dire le logarithme du quotient

$$\frac{\frac{d\alpha}{dq'_1}}{\frac{d\alpha}{dq'_2}},$$

et par suite ce quotient lui-même, doit être indépendant de q'_1 et q'_2, et n'être fonction que de q_1 et q_2; on a donc, en désignant par $\varphi(q_1, q_2)$ cette fonction,

$$\frac{d\alpha}{dq'_1} - \varphi(q_1, q_2) \cdot \frac{d\alpha}{dq'_2} = 0.$$

Pour intégrer cette équation aux différentielles partielles du premier ordre, on prend le système

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{dq'_1}{1} = \frac{dq'_2}{-\varphi},$$

qui montre que l'intégrale α, considérée relativement aux variables q'_1 et q'_2, est une fonction de

$$q'_2 + \varphi \cdot q'_1.$$

Donc une intégrale ne saurait être commune à plusieurs problèmes si elle ne rentre dans la forme

$$(14) \qquad \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = \mathrm{F}[q_1, q_2, q'_2 + \varphi(q_1, q_2) q'_1].$$

15. La somme

$$q'_2 + \varphi(q_1, q_2) q'_1,$$

multipliée par un certain facteur, peut toujours devenir une dérivée exacte m'. Adoptons pour lignes coordonnées les courbes (m), et leurs trajectoires orthogonales (n).

L'intégrale considérée prend la forme

$$\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = \mathrm{F}(m, n, m');$$

on a d'ailleurs

$$ds^2 = \frac{1}{\mu} dm^2 + \frac{1}{\nu} dn^2,$$

et l'équation (A), dans laquelle on remplace q_1 par m, q_2 par n, E par $\frac{1}{\mu}$, G par $\frac{1}{\nu}$, $\frac{d\alpha}{dq'_2}$ par o, devient

$$(A_1)\quad \left\{\begin{aligned} &0 \text{ ou } +1 = \frac{d\alpha}{dm}m' + \frac{d\alpha}{dn}n' \\ &\qquad + \frac{d\alpha}{dm'}\left[\mu Q_1 - \frac{\mu}{2\nu^2}\frac{d\nu}{dm}n'^2 + \frac{1}{2\mu}\frac{d\mu}{dm}m'^2 + \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dn}m'n'\right].\end{aligned}\right.$$

Dans cette équation, qui doit être identique, n' n'entre qu'explicitement; on peut donc égaler à zéro séparément les coefficients de n' et de n'^2; on obtient ainsi les deux relations

$$(15)\qquad \frac{d\nu}{dm} = 0,$$

$$(16)\qquad \frac{d\alpha}{dn} + \frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{dm'}\frac{d\mu}{dn}m' = 0.$$

La première prouve que ν ne contient pas m et ne dépend que de n; la distance

$$\frac{dn}{\sqrt{\nu}}$$

des deux courbes (n), $(n + dn)$ est donc indépendante de m. Ces deux courbes sont donc équidistantes; et, en vertu du n° **9**, *leurs trajectoires orthogonales* (m) *sont des lignes géodésiques*.

La seconde (16) donne

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{dn}{1} = \frac{dm'}{\frac{m'}{\mu}\frac{d\mu}{dn}},$$

et par suite

$$\alpha = C,\qquad \frac{dm'}{m'} = \frac{\frac{d\mu}{dn}dn}{\mu},\qquad \frac{m'}{\mu} = C_1;$$

elle montre donc que l'intégrale α, considérée relativement aux variables m' et n, est une fonction de

$$\frac{m'}{\mu}.$$

Nous substituerons, pour plus de facilité, à m' la variable u, définie par la relation

$$\frac{m'}{\mu} = u,$$

et nous aurons pour la forme de l'intégrale

$$(17) \qquad \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha + t = \mathrm{F}(m, u).$$

16. Les courbes (m) étant des lignes géodésiques, on peut (nº **10**) dans l'élément linéaire réduire le coefficient de dn^2 à l'unité, c'est-à-dire prendre

$$ds^2 = dn^2 + \frac{1}{\mu} dm^2,$$

ou μ est une fonction de m et de n.

Dès lors, si l'on profite de cette simplification qui donne $\nu = 1$, si de plus on a égard à la relation (16) et à la formule

$$\frac{d\alpha}{dm'} = \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{dm'} = \frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{du},$$

qui résulte de la définition de la nouvelle variable u, l'équation (A_1) prend la forme

$$(A_2) \qquad 0 \quad \text{ou} \quad +1 = \frac{d\alpha}{dm}\mu u + \frac{d\alpha}{du}\left(Q_1 - \frac{1}{2}u^2\frac{d\mu}{dm}\right).$$

Rappelons que α est une fonction de m et de u, et que Q_1 et μ sont des fonctions de m et de n. La différentiation de (A_1), par rapport à la variable u, donne

$$(18) \qquad 0 = \frac{d^2\alpha}{dm\,du}\mu u + \frac{d\alpha}{dm}\mu + \frac{d^2\alpha}{du^2}\left[Q_1 - \frac{1}{2}u^2\frac{d\mu}{dm}\right] - u\frac{d\mu}{dm}\frac{d\alpha}{du},$$

et si entre cette relation et (A_2) on élimine la parenthèse, ce qui se fait en multipliant (A_2) par $-\frac{d^2\alpha}{du^2}$ et (18) par $\frac{d\alpha}{du}$ et ajoutant, on obtient l'é-

quation

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} o \quad \text{ou} \quad -\frac{d^2\alpha}{du^2} = &-u\frac{d\mu}{dm}\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 \\ &+\mu\left[u\left(\frac{d^2\alpha}{dm\,du}\frac{d\alpha}{du} - \frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{d\alpha}{dm}\right) + \frac{d\alpha}{dm}\frac{d\alpha}{du}\right], \end{aligned} \right.$$

qui va nous permettre de déterminer la forme de la fonction μ. Mais pour cela il faut distinguer deux cas, suivant que cette équation différentielle du premier ordre a pour premier membre o ou $\frac{d^2\alpha}{du^2}$, c'est-à-dire suivant que l'intégrale étudiée doit être indépendante du temps ou contenir le temps.

IV.

Intégrales indépendantes du temps.

17. Lorsque l'intégrale ne renferme pas le temps, le premier membre de l'équation (19) est zéro, et on peut donner à cette équation la forme

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dm} = \frac{1}{u\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2}\left[\frac{d\alpha}{dm}\frac{d\alpha}{du} + u\left(\frac{d^2\alpha}{dm\,du}\frac{d\alpha}{du} - \frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{d\alpha}{dm}\right)\right].$$

Or μ est une fonction des variables m et n seules; elle ne contient pas u; le second membre ne dépend au contraire que de u et de m, il ne renferme pas n, car α n'est fonction que de m et de u : on doit conclure de là que la variable u disparaît d'elle-même dans le second membre, et que l'expression

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dm} = \frac{d}{dm}(\log\mu)$$

est une fonction de m seul. On a donc, en intégrant,

$$\log\mu = \log M + \log N,$$
$$\mu = M.N,$$

M et N étant deux fonctions, l'une de m, l'autre de n.

Par conséquent, l'élément des trajectoires orthogonales des lignes

géodésiques (m) a pour expression

$$\frac{dm}{\sqrt{MN}} = \frac{\frac{dm}{\sqrt{M}}}{\sqrt{N}}.$$

Or on peut toujours poser

$$(20) \qquad \int \frac{dm}{\sqrt{M}} = \omega;$$

et l'on voit, en désignant par r la variable n, de façon que les nouvelles variables qui servent de paramètres au système de coordonnées soient ω et r, que l'élément linéaire d'une courbe quelconque tracée sur la surface a une expression de la forme

$$ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{R},$$

où R est une fonction de r seul.

Donc, d'après ce que nous avons dit au n° **11**, *la surface est applicable sur une surface de révolution.*

C'est le théorème de M. Bertrand.

18. Il reste à calculer Q_1 et à trouver la forme générale de l'intégrale.

En désignant par u l'ancienne variable u multipliée par $\sqrt{M}$, l'intégrale prend la forme

$$\alpha = F(\omega, u),$$

et l'équation (A) à laquelle il faut actuellement revenir se réduit à

$$(A_3) \qquad 0 = \frac{d\alpha}{d\omega} Ru + \frac{d\alpha}{du} Q_1,$$

dans notre nouveau système de variables. Elle donne

$$Q_1 = -\frac{\frac{d\alpha}{d\omega}}{\frac{d\alpha}{du}} uR.$$

Or Q_1 étant une fonction de ω et de r, et le second membre dépendant de ω, u, R, il faut que u disparaisse de lui-même, et par suite

que le coefficient de R, qui est d'ailleurs indépendant de r, soit une fonction de ω seulement. On peut toujours représenter une telle fonction par une dérivée Ω'; nous aurons donc

$$(21)\qquad Q_1 = -R\Omega'.$$

Cette notation est plus commode pour la recherche de la forme de l'intégrale.

19. Eu égard à cette valeur de Q_1, l'équation (A_3) devient

$$o = \frac{d\alpha}{d\omega}u - \frac{d\alpha}{du}\Omega'.$$

L'intégration dépend du système simultané

$$\frac{d\alpha}{o} = \frac{d\omega}{u} = -\frac{du}{\Omega'},$$

d'où

$$\alpha = C,$$

$$o = \Omega' d\omega + udu, \quad \frac{1}{2}u^2 + \Omega = C_1,$$

en sorte qu'on a

$$\alpha = F\left(\frac{1}{2}u^2 + \Omega\right),$$

ou simplement

$$\alpha = \frac{1}{2}u^2 + \Omega;$$

car il revient au même d'écrire qu'une expression est constante ou qu'une fonction de cette expression est constante.

D'ailleurs on a

$$\frac{u}{\sqrt{M}} = \frac{m'}{\mu} = \frac{m'}{MN},$$

et, par suite, à cause de l'équation (20),

$$u^2 = \frac{\omega'^2}{R^2}.$$

L'intégrale a donc la forme définitive

$$(22)\qquad \alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega'^2}{R^2} + \Omega.$$

V.

Intégrales qui dépendent du temps.

20. Lorsque l'intégrale considérée doit contenir le temps, l'équation (19) est une équation différentielle linéaire avec second membre, qui prouve que la fonction μ est de la forme

$$\mu = M + M_1 N,$$

M et M_1 étant deux fonctions de m, et N une fonction de n. Les termes en u, dans le second membre, doivent d'ailleurs s'entre-détruire, puisque μ ne dépend que de m et de n.

L'élément des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques (m) prend alors la forme

$$\frac{dm}{\sqrt{M + NM_1}} = \frac{\dfrac{dm}{\sqrt{M_1}}}{\sqrt{\dfrac{M}{M_1} + N}},$$

ou

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega_1 + R}};$$

en posant

(23) $$\int \frac{dm}{\sqrt{M_1}} = \omega,$$

appelant r la variable n, de façon à avoir ω et r pour paramètres des lignes coordonnées, et désignant par Ω_1 et R deux fonctions, l'une de ω, l'autre de r.

L'intégrale a d'ailleurs la forme $\left(\text{en changeant } u \text{ en } \dfrac{u}{\sqrt{M_1}}\right)$

$$\alpha + t = F(\omega, u);$$

et, dans ce nouveau système de variables, l'équation (A_1) à laquelle il convient actuellement de revenir, se réduit à

(A_4) $$+ 1 = \frac{d\alpha}{d\omega}(R + \Omega_1)u + \frac{d\alpha}{du}\left(Q_1 - \frac{1}{2}u^2\Omega'_1\right);$$

d'où l'on déduit

$$Q_1 = -Ru\frac{\frac{d\alpha}{d\omega}}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{1}{2}u^2\Omega'_1 - \frac{1}{\frac{d\alpha}{du}}\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\Omega_1 u - 1\right).$$

Q_1 ne dépendant que de ω et de r, u doit disparaître de lui-même dans le second membre, et l'on doit avoir

(24) $$Q_1 = -R\Omega'_2 + \Omega_3,$$

Ω'_2 et Ω_3 étant deux fonctions de ω; nous mettons la première sous la forme d'une dérivée, pour faciliter les calculs suivants.

21. Cette valeur de Q_1 transforme l'équation (A_4) en la suivante :

(A_5) $$-1 = \frac{d\alpha}{d\omega}(R + \Omega_1)u + \frac{d\alpha}{du}\left(-R\Omega'_2 + \Omega_3 - \frac{1}{2}u^2\Omega'_1\right),$$

dans laquelle la variable r figure explicitement, car elle n'entre que dans R. Égalant donc à zéro le coefficient de R et le terme indépendant, on trouve les deux relations

(25) $$u\frac{d\alpha}{d\omega} - \frac{d\alpha}{du}\Omega'_2 = 0,$$

(26) $$1 + \frac{d\alpha}{d\omega}\Omega_1 u + \frac{d\alpha}{du}\left(\Omega_3 - \frac{1}{2}u^2\Omega'_1\right) = 0.$$

La première donne

$$\frac{d\alpha}{0} = \frac{d\omega}{u} = \frac{du}{-\Omega'_2};$$

d'où

$$\alpha = C,$$

$$\Omega'_2 d\omega + u du = 0, \quad \Omega_2 + \frac{1}{2}u^2 = C_1,$$

en sorte qu'on a pour l'intégrale

(27) $$\alpha + t = F\left(\frac{1}{2}u^2 + \Omega_2\right).$$

22. Posons

(28) $$\Omega_2 + \frac{1}{2}u^2 = v;$$

par ce changement de variable, l'équation (26), après élévation au carré et eu égard aux formules

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{dv} u, \qquad \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{d\alpha}{dv} \Omega'_2,$$

devient

$$(29) \qquad \frac{1}{2\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2} = (v - \Omega_2)[\Omega'_2 \Omega_1 + \Omega_3 - (v - \Omega_3)\Omega'_1]^2.$$

Le premier membre ne dépend que de v; il doit donc en être de même du second, qui est un polynôme du troisième degré en v. Ce polynôme est ici décomposé en facteurs; pour qu'il ne depende que de v, il faut que les racines de l'équation, qu'on obtiendrait en annulant ce polynôme en v, soient constantes; donc on a déjà, à cause du premier facteur,

$$\Omega_2 = \text{constante} = p.$$

Le second facteur se réduit à

$$[\Omega_3 - (v - p)\Omega'_1],$$

et il donne à son tour

$$\Omega'_1 = \text{constante} = -k;$$

d'où

$$\Omega_1 = -k\omega + h,$$

et

$$\Omega_3 = \text{constante} = g.$$

On a donc

$$(30) \qquad 1^\circ. \quad Q_1 = g,$$

c'est la condition imposée aux forces;

$$2^\circ. \quad \Omega_1 + R = R - k\omega$$

(car la constante h passe dans R), et, par suite,

$$(31) \qquad ds^2 = dr^2 + \frac{d\omega^2}{R - k\omega},$$

c'est la forme que nous avions annoncée pour l'élément linéaire dans l'introduction.

Telles sont les conditions imposées aux forces et à la surface pour qu'il existe une intégrale commune à plusieurs problèmes et qui dépende du temps.

23. Voici, pour finir, comment on trouve la forme de cette intégrale. L'équation (29) donne

$$\frac{1}{2\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2} = (v-p)[g+(v-p)k]^2;$$

d'où

$$d\alpha = \frac{dv}{\sqrt{2(v-p)}[g+(v-p)k]},$$

ou, à cause de $2(v-p) = u^2$,

$$d\alpha = \frac{du}{g+\frac{1}{2}ku^2},$$

et par suite, en intégrant,

$$\alpha + t = \sqrt{\frac{2}{gk}} \cdot \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{k}{2g}}\, u.$$

D'ailleurs on a

$$u = \frac{m'\sqrt{M_1}}{\mu} = \frac{\frac{m'}{\sqrt{M_1}}}{\left(\sqrt{\frac{M}{M_1}}+N\right)^2} = \frac{\omega'}{R-k\omega},$$

et l'intégrale prend la forme définitive

$$\alpha + t = \sqrt{\frac{2}{gk}} \cdot \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{k}{2g}}\, \frac{\omega'}{R-k\omega}.$$

NOTE

SUR

UNE QUESTION DE THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit n un nombre pair, en sorte que l'on ait

$$n = 2^{\alpha} m,$$

m étant un entier impair et l'exposant α étant au moins égal à l'unité. Représentons n de toutes les manières possibles par une somme de quatre carrés, c'est-à-dire considérons toutes les solutions entières de l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

où le premier membre est donné, et où chacun des nombres s, s', s'', s''' peut être indifféremment positif ou négatif, ou zéro, deux solutions étant regardées comme distinctes quand s, s', s'', s''' n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. Jacobi a trouvé que le nombre N des solutions dont il s'agit est égal à vingt-quatre fois la somme des diviseurs de m. Ainsi l'on a

$$N = 24 \int m,$$

en employant la notation d'Euler pour désigner la somme des diviseurs de m.

Attachons-nous exclusivement, dans l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

au premier carré s^2. Nous pourrons nous proposer de chercher une expression simple de la somme

$$\sum s^{\mu}$$

des puissances de degré μ des valeurs que s prend dans les représentations successives de n, dont le nombre N vient d'être fixé. Et déjà

l'on peut dire que N répond au cas de $\mu = 0$, puisque $s^0 = 1$ donne naturellement

$$\sum s^0 = \mathrm{N}.$$

On peut voir aussi, à cause des signes opposés avec lesquels chaque valeur de s peut être prise quand elle n'est pas nulle, que

$$\sum s^{\mu} = 0,$$

toutes les fois que l'exposant μ est impair. Enfin le cas de $\mu = 2$ est facile à traiter; car en prenant l'ensemble des équations

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2$$

pour en faire la somme, on obtient

$$n\mathrm{N} = \sum s^2 + \sum s'^2 + \sum s''^2 + \sum s'''^2,$$

d'où l'on tire

$$\sum s^2 = \frac{n}{4}\mathrm{N},$$

parce que les quatre sommes

$$\sum s^2, \quad \sum s'^2, \quad \sum s''^2, \quad \sum s'''^2$$

ne peuvent manquer d'être égales. Mais pour les valeurs paires de μ qui surpassent 2, la question subsiste et paraît digne d'attention : je ne sache pas du moins que personne l'ait résolue.

Je ferai dans cette Note un premier pas en donnant la valeur de $\sum s^4$. Je me suis en effet assuré (par une démonstration en règle) que

$$\sum s^4 = \frac{n^2}{8}\mathrm{N}.$$

Vérifions cette formule sur quelques exemples.

Soit d'abord

$$n = 2,$$

et, par suite,

$$m = 1, \quad \int m = 1, \quad \mathrm{N} = 24.$$

On aura vingt-quatre solutions de l'équation

$$2 = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

qui se déduiront de ce fait que $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, en permutant les carrés et en observant que $1^2 = (\pm 1)^2$. Dans douze de ces solutions on aura $s = \pm 1$, tandis que $s = 0$ pour les douze autres. On a donc bien

$$\sum s^4 = 12 = \frac{2^2}{8} \times 24,$$

comme l'indiquait notre formule.

Soit, en second lieu,

$$n = 4,$$

ce qui suppose encore

$$m = 1, \quad \int m = 1, \quad N = 24.$$

Les vingt-quatre solutions seront ici formées de six solutions pour lesquelles $s = 0$, de seize solutions pour lesquelles $s = \pm 1$, enfin de deux solutions pour lesquelles $s = \pm 2$. De là

$$\sum s^4 = 16 + 2.16 = \frac{4^2}{8} \times 24.$$

Notre formule est encore vérifiée.

Soit à présent

$$n = 6,$$

d'où

$$m = 3, \quad \int m = 4, \quad N = 24.4 = 96.$$

Nos quatre-vingt-seize solutions se diviseront ici en vingt-quatre solutions pour lesquelles $s = 0$, en quarant-huit solutions pour lesquelles $s = \pm 1$, et en vingt-quatre solutions pour lesquelles $s = \pm 2$. Donc

$$\sum s^4 = 48 + 24.16 = 18.24 = \frac{36}{8} \times 96,$$

comme le disait encore notre formule.

Soit, comme dernier exemple,

$$n = 10,$$

par conséquent,

$$m = 5, \quad \int m = 6, \quad N = 24.6 = 144.$$

Des cent quarante-quatre solutions qu'on a cette fois, vingt-quatre répondent à $s = 0$, soixante à $s = \pm 1$, quarante-huit à $s = \pm 2$ et

douze à $s = \pm 3$. De là résulte

$$\sum s^4 = 60 + 48.16 + 12.81 = 12.150,$$

ce qui peut aisément s'écrire

$$\sum s^4 = \frac{10^2}{8} \times 24.6,$$

conformément à notre formule.

Observons, en terminant, que si, au lieu de ne considérer que le premier terme s^2 dans l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

on considérait les deux premiers termes s^2, s'^2, il serait facile de trouver la somme,

$$\sum (s^2 s'^2),$$

des valeurs du produit $s^2 s'^2$ pour toutes les représentations de n. En élevant en effet au carré les deux membres de l'équation

$$n = s^2 + s'^2 + s''^2 + s'''^2,$$

on a l'équation nouvelle

$$n^2 = s^4 + s'^4 + s''^4 + s'''^4 + 2(s^2 s'^2 + s^2 s''^2 + s^2 s'''^2 + s'^2 s''^2 + s'^2 s'''^2 + s''^2 s'''^2).$$

Ajoutons membre à membre toutes les équations de ce genre pour l'ensemble des représentations de n, et observons que les quatre sommes

$$\sum s^4, \quad \sum s'^4, \quad \sum s''^4, \quad \sum s'''^4,$$

ont pour valeur commune $\frac{n^2}{8}$ N, et que d'un autre côté les sommes

$$\sum (s^2 s''^2), \quad \sum (s^2 s'''^2), \quad \sum (s'^2 s''^2), \quad \sum (s'^2 s'''^2), \quad \sum (s''^2 s'''^2)$$

sont toutes égales à

$$\sum (s^2 s'^2) :$$

il s'ensuivra que

$$n^2 \mathrm{N} = \frac{n^2}{2} \mathrm{N} + 12 \sum (s^2 s'^2),$$

d'où

$$\sum (s^2 s'^2) = \frac{n^2}{24} \mathrm{N}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum (s^2 s'^2) = n^2 \int m.$$

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

CLASSIFICATION DES VALEURS IMAGINAIRES CORRESPONDANTES DE LA FONCTION ET DES VARIABLES DONT ELLE DÉPEND.

Le Mémoire dont nous commençons la publication contiendra les applications de la méthode, que nous développons dans ce premier article, à la recherche des périodes des intégrales simples, doubles ou d'ordre quelconque, à l'étude de la marche d'une fonction implicite d'une ou de plusieurs variables imaginaires, etc.

Nous nous bornons, dans cette première partie, à reproduire sous une forme plus concise, et avec de légères additions ou corrections, le résumé d'un ouvrage que nous avons publié en 1845 sur le même sujet.

Ce résumé était indispensable pour l'intelligence des articles qui suivront, et qui font le principal objet de notre publication actuelle.

CHAPITRE PREMIER.

Des lieux imaginaires dont il sera question dans ce Mémoire.

1. Les solutions imaginaires d'une équation indéterminée sont infiniment plus nombreuses que les solutions réelles de la même équation.

Une équation $f(x, y) = 0$, ne contenant qu'une variable indépendante, ne fournit qu'une seule suite de solutions réelles, embrassant un espace plus ou moins étendu entre $+\infty$ et $-\infty$, soit par rapport à x, soit par rapport à y; mais si, dans la même équation, on rem-

place x par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

et y par

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1}:$$

comme on n'aura entre les quatre variables α, β, α', β' que deux relations, provenant de la décomposition du premier membre de l'équation

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0$$

en ses deux parties réelle et imaginaire, l'indétermination deviendra double.

De même, dans une équation $f(x, y, z) = 0$, l'indétermination n'est que double tant qu'on n'en considère que les solutions réelles, et devient quadruple lorsqu'il s'agit des solutions imaginaires.

2. On pourrait donc étendre considérablement le champ d'une équation indéterminée, en s'habituant à en étudier les solutions imaginaires aussi bien que les solutions réelles; on les classerait d'abord afin d'y réduire l'indétermination au même ordre que celle des solutions réelles de la même équation, et si l'on pouvait ensuite attacher à des choses réelles et sensibles la représentation sous forme imaginaire, il est clair qu'on serait parvenu à exprimer, sous une même formule, d'abord la loi principale et caractéristique observée par les variables réelles, et, en outre, une infinité d'autres lois analogues à la première.

L'emploi des formes négatives aurait donc permis de condenser dans une même formule l'expression des lois correspondantes aux différentes phases d'un même phénomène, et l'emploi des formes imaginaires permettrait d'y lire encore l'expression des lois d'une infinité de phénomènes analogues au premier.

Une équation à deux variables pourrait représenter une courbe réelle et une infinité de courbes imaginaires; une équation à trois variables représenterait une surface réelle et une infinité d'infinités de surfaces imaginaires.

3. La réalisation de ce plan nécessite la solution de deux questions

préalables : comment classera-t-on les solutions imaginaires d'une équation à deux ou à trois variables; et comment ensuite construira-t-on le point correspondant à chaque solution imaginaire? Car en résolvant arbitrairement ces deux questions, on pourrait associer, au lieu géométrique représenté réellement, tous les lieux imaginaires que l'on voudrait et qui n'auraient avec le premier aucune propriété commune présentant quelque intérêt.

Avant tout, il faudra que les lieux imaginaires, associés au lieu réel, restent les mêmes quels que soient les axes auxquels le lieu réel vienne à être rapporté; c'est-à-dire que les coordonnées réelles de chaque point imaginaire devront se former des parties réelles et imaginaires de ses coordonnées imaginaires, suivant une loi telle, que ce point se retrouve toujours à la même place sur le plan ou dans l'espace, soit qu'on le construise, par rapport aux anciens axes, au moyen de ses coordonnées fournies par l'équation proposée, soit qu'on le construise par rapport à un nouveau système quelconque d'axes, au moyen de ses nouvelles coordonnées composées des anciennes, d'après les formules propres à passer de l'un des systèmes d'axes à l'autre pour un point réel.

Cette question étant supposée résolue, il faudra en second lieu que la loi de progression des solutions d'une même suite soit telle, que, les lieux imaginaires associés au lieu réel étant définis et construits, on puisse les étudier aussi bien dans l'équation qui les représentera imaginairement que dans celles qui les représenteraient réellement; il faudra que les mêmes questions posées, soit par rapport au lieu réel, soit par rapport à l'un quelconque des lieux imaginaires représentés par la même équation, puissent être résolues au moyen des mêmes calculs, de façon que pour passer de l'un des lieux aux autres, il n'y ait jamais qu'à substituer, dans les résultats obtenus, des coordonnées imaginaires à des coordonnées réelles, et non pas, ce qui est bien différent, de certaines fonctions des paramètres des lieux imaginaires à des fonctions analogues des paramètres du lieu réel, comme on l'avait fait jusqu'ici dans toutes les tentatives de géométrie comparée; comme on fait, par exemple, lorsque, pour passer de l'ellipse à l'hyperbole, on remplace, dans les résultats, le carré de l'un des axes de la première courbe par le carré affecté du signe *moins* de l'axe non transverse de la seconde.

L'être géométrique alors ne serait plus, comme dans l'antiquité, une branche ou nappe de courbe ou de surface, jouissant dans toute son étendue, et sans aucune modification quelconque, de propriétés absolument identiques; ni, comme dans la géométrie moderne, un assemblage de plusieurs branches ou nappes dont les points jouiraient de propriétés pareilles, à la différence près de quelques changements de sens ou de direction; mais une courbe ou surface, lieu principal dans la question qui en aurait fourni l'équation, accompagnée d'une infinité d'autres lieux secondaires, jouissant de propriétés analogues, et qui se substitueraient au lieu réel toutes les fois qu'il ne pourrait plus fournir les solutions déterminées qu'on s'était proposé d'obtenir.

Mais il est clair que les deux questions, bien qu'elles puissent être posées séparément, doivent être résolues simultanément, en quelque sorte l'une pour l'autre; il eût été impossible de les séparer à l'origine: toutefois nous pourrons nous borner ici à donner successivement la solution de chacune d'elles, sauf à vérifier ensuite que ces deux solutions concourent bien au but proposé.

Nous nous occuperons d'abord des équations à deux variables, c'est-à-dire des lieux plans.

4. Mettons de côté, pour un moment, la question de construction: la suite de solutions imaginaires de l'équation proposée, qui devra présenter le plus d'intérêt et fournir le lieu le plus analogue au lieu réel, sera évidemment celle qui comprendrait toutes les valeurs réelles de x, auxquelles correspondraient des valeurs imaginaires de y. De toutes les suites de solutions imaginaires de l'équation proposée, ce sera celle qui s'éloignera le moins de la suite des solutions réelles de la même équation.

Mais cette première idée en suggère immédiatement une autre : si la seconde question, qui doit nous occuper bientôt, peut être résolue, si l'on peut trouver, pour construire le point correspondant à un système de valeurs imaginaires de x et de y, une règle qui fournisse toujours le même point pour la même solution transformée en raison d'un changement d'axes: à chaque système d'axes correspondra une suite de solutions imaginaires par rapport à y seulement, présentant tout autant d'intérêt que la première. En conséquence, on réunira

dans une même suite toutes les solutions imaginaires de l'équation proposée qui pourraient devenir en même temps réelles par rapport à x, moyennant un changement d'axes convenable.

Ainsi se trouvent définies toutes les suites de solutions imaginaires de l'équation proposée qui fourniront les différents lieux imaginaires que nous considérons comme représentés par cette équation.

Il est facile de découvrir le caractère analytique commun de toutes les solutions qui formeront une même suite ; ce caractère étant connu, la transformation préalable de coordonnées deviendra superflue. on pourra, dans l'équation proposée, rechercher toutes ces solutions, en sorte qu'il ne restera plus qu'à construire le point représenté par chacune d'elles.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

les coordonnées d'un point imaginaire : une transformation d'axes les changera en

$$x' = mx + ny = m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1},$$

$$y' = m'x + n'y = m'\alpha + n'\alpha' + (m'\beta + n'\beta')\sqrt{-1};$$

la nouvelle abscisse du point considéré serait donc réelle si $\frac{m}{n}$ se trouvait égal à $-\frac{\beta'}{\beta}$. On voit que, quelles que soient les équations qu'on ait l'intention de traiter, ensemble ou séparément, une même transformation de coordonnées pourra rendre en même temps réelles les abscisses de tous les points représentés par celles de leurs solutions dans lesquelles le rapport des parties imaginaires de y et de x aurait la même valeur.

Chacun des lieux imaginaires que nous nous proposons d'étudier, concurremment avec le lieu réel représenté par une équation quelconque, sera donc fourni par les solutions de cette équation, où le rapport des parties imaginaires de y et de x aurait la même valeur.

Nous désignerons habituellement ce rapport par la lettre C, et nous

lui donnerons le nom de *caractéristique* du lieu imaginaire correspondant.

Les caractéristiques d'un même lieu imaginaire rapporté successivement à deux systèmes d'axes différents sont liées par la relation

$$CC' \sin Y'Y + C \sin X'Y - C' \sin Y'X - \sin X'X = 0.$$

Il suffirait évidemment de changer convenablement la direction de l'axe des y pour rendre réelles par rapport à x telles solutions que l'on voudrait, où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait la même valeur; en effet, des solutions actuellement réelles par rapport à x resteraient telles, quelque nouvelle direction qu'on donnât à l'axe des x sans changer celle de l'axe des y, puisque la nouvelle abscisse ne dépendrait que de l'ancienne.

Si l'on ne fait varier que l'axe des y, la relation précédente se simplifie : elle devient

$$CC' \sin Y'Y + C \sin XY - C' \sin Y'X = 0.$$

On peut tirer de cette équation une relation entre la caractéristique du lieu imaginaire qu'on veut considérer et la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y, pour rendre ses abscisses réelles.

C étant la caractéristique du lieu, si ses abscisses sont devenues réelles, C' est infini et la relation précédente se réduit à

$$C \sin Y'Y = \sin Y'X,$$

ou

$$C = \frac{\sin Y'X}{\sin Y'Y}.$$

C'est-à-dire que la caractéristique de chacun des lieux imaginaires est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y, pour rendre ses abscisses réelles.

5. Arrivons maintenant à la construction du point représenté par chaque solution imaginaire.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

les coordonnées d'un point imaginaire quelconque : une transformation de coordonnées les changera en

$$x' = mx + ny = m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1},$$
$$y' = m'x + n'y = m'\alpha + n'\alpha' + (m'\beta + n'\beta')\sqrt{-1};$$

or il est évident que si dans les anciennes aussi bien que dans les nouvelles coordonnées on remplace $\sqrt{-1}$ par 1, et qu'on construise, par rapport aux deux systèmes d'axes, d'une part le point

$$x = \alpha + \beta,$$
$$y = \alpha' + \beta',$$

et de l'autre le point

$$x' = m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta'),$$
$$y' = m'\alpha + n'\alpha' + (m'\beta + n'\beta'),$$

ces deux points coïncideront.

On peut donc adopter la règle qui vient d'être énoncée ; elle revient à regarder $\sqrt{-1}$ comme un signe caractéristique de la nature de la grandeur représentée, mais qui ne saurait en modifier l'étendue. On peut concevoir cette règle sous un autre point de vue : si l'on imagine menées de l'origine les lignes qui aboutiraient aux points $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ dans l'ancien système d'axes et aux points $[m\alpha + n\alpha', m'\alpha + n'\alpha']$, $[m\beta + n\beta', m'\beta + n'\beta']$ dans le nouveau, les deux premières coïncideront avec les deux dernières; on pourrait se rendre de l'origine au point $[xy]$ ou $[x'y']$ en décrivant la ligne brisée dont les côtés seraient égaux et parallèles aux lignes qui joindraient l'origine aux points $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ ou $[m\alpha + n\alpha', m'\alpha + n'\alpha']$, $[m\beta + n\beta', m'\beta + n'\beta']$; qu'on opérât sur l'un ou l'autre système d'axes, on aurait décrit la même ligne, brisée au même point.

Pour tous les points appartenant à un même lieu imaginaire, $\frac{\beta'}{\beta}$ est constant : le second côté de la ligne brisée conserverait donc une direction fixe, parallèle à celle qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre réelles les abscisses de tous les points de ce lieu.

Si l'équation considérée a ses coefficients réels, à la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

il en correspond une autre

$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1},$$

qui appartient à la même suite, les deux points $[\alpha+\beta\sqrt{-1}, \alpha'+\beta'\sqrt{-1}]$, $[\alpha-\beta\sqrt{-1}, \alpha'-\beta'\sqrt{-1}]$ appartiennent à un même lieu imaginaire; les seconds côtés des deux lignes brisées qui y mènent de l'origine sont égaux et opposés, ce sont les moitiés d'une corde de ce lieu menée parallèlement à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre ses abscisses réelles; le point où les deux lignes se brisent est le milieu de cette corde, c'est donc un point du diamètre du lieu considéré correspondant aux cordes parallèles à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre ses abscisses réelles.

6. En résumé, les lieux imaginaires que nous nous proposons d'étudier, que nous associons à chaque lieu réel et que nous regardons comme représentés aussi bien que lui par son équation, sont toutes les courbes que l'on obtiendrait en prenant les solutions de l'équation proposée, où le rapport des parties imaginaires de y et de x serait une constante arbitraire C, et construisant pour chaque solution le point qui aurait pour coordonnées les mêmes valeurs de x et de y, dans lesquelles on aurait remplacé $\sqrt{-1}$ par 1. Nous donnerons habituellement le nom de *conjuguées* de la courbe réelle à ces courbes imaginaires.

Si des parallèles menées dans le plan de la courbe réelle ne la coupent pas toutes en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, il existe nécessairement une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire commun de ces parallèles; les rencontres avec cette conjuguée et avec la courbe réelle complètent pour chaque parallèle (sauf le cas où elles ont une des directions asymptotiques) le nombre marqué par le degré de l'équation.

Si l'on peut mener à la courbe réelle des tangentes parallèles à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre réelles les abscisses d'une conjuguée, cette conjuguée passe évidemment par les points de contact de ces tangentes, elle est elle-même tangente en ces points à la courbe réelle, et les deux courbes ont leurs concavités tournées en sens contraires. La courbe réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées ou du moins d'une partie de ses conjuguées.

Si toutes les droites imaginables menées, dans le plan de la courbe réelle, parallèlement aux rayons d'un secteur circulaire, coupent toujours cette courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, la courbe n'a pas de conjuguée dont la caractéristique puisse être comprise entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes du secteur en question.

Si l'on ne peut pas mener de tangentes à la courbe réelle parallèlement à une direction donnée, et que cependant les parallèles à cette direction la coupent en un nombre de points moindre que le degré de son équation, il existe une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire de la direction considérée, mais cette conjuguée ne touche plus la courbe réelle.

Les courbes imaginaires représentées par une même équation, soit qu'elles touchent ou ne touchent pas la courbe réelle, peuvent avoir une seconde enveloppe que nous déterminerons plus tard.

On peut, pour discuter et construire une des conjuguées d'une courbe, soit rendre ses abscisses réelles, en changeant la direction de l'axe des y, et faire ensuite passer x par toutes les valeurs réelles, dans la nouvelle équation; soit calculer et construire les coordonnées des rencontres imaginaires de la courbe proposée avec des droites réelles ayant pour coefficient angulaire la caractéristique de la conjuguée qu'on veut obtenir. Nous désignerons souvent ces droites sous le nom de *cordes réelles de la conjuguée*.

Les conjuguées de l'ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; elles occupent tout le plan, sauf l'intérieur de la courbe.

Les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun, leurs caractéristi-

ques sont comprises entre les coefficients angulaires des rayons asymptotiques menés du centre aux deux branches de la courbe. Ces conjuguées, qui toutes touchent la courbe réelle, ont pour seconde enveloppe l'hyperbole ayant les mêmes axes, mais changés de transverse en non transverse, et réciproquement; elles occupent toute la portion du plan comprise entre les deux enveloppes.

Les conjuguées d'une parabole sont des paraboles égales et opposées par un diamètre commun; elles occupent tout l'espace situé en dehors de la proposée.

7. *Des surfaces imaginaires.* — Nous construirons, comme en géométrie plane, le point correspondant à une solution imaginaire quelconque d'une équation à trois variables, en remplaçant le signe $\sqrt{-1}$ par 1 dans les valeurs trouvées pour ses coordonnées. La position du point ainsi obtenu sera indépendante du choix des axes, c'est-à-dire que le même point sera toujours fourni par la solution primitive et par cette solution transformée en raison du déplacement des axes; car les formules qui servent à passer d'un système à un autre, dans l'espace, sont linéaires, comme celles qui servent à effectuer le même passage dans un plan, et c'était là en définitive la raison de la permanence du point obtenu.

Quant aux conjuguées de la surface réelle représentée par l'équation proposée, nous formerons chacune d'elles de la réunion des points correspondants aux solutions de cette équation dans lesquelles les rapports des parties imaginaires de z et de x, de z et de y seraient des nombres constants C et C'; ces rapports seront les deux caractéristiques de la conjuguée correspondante.

Il est évident que les solutions de l'équation proposée dans lesquelles z seulement serait imaginaire, se changeraient, par suite d'une transformation d'axes, en d'autres dans lesquelles les rapports des parties imaginaires de z et de x, de z et de y seraient constants; et que réciproquement on pourrait rendre réelles par rapport à x et y, en dirigeant convenablement l'axe des z, toutes les solutions dans lesquelles les parties imaginaires des trois variables seraient dans des rapports constants.

Les conjuguées d'une surface seront donc toutes les surfaces qu'on

obtiendrait en donnant successivement à l'axe des z toutes les directions, et construisant, pour chacune d'elles, les valeurs imaginaires de z correspondantes à des valeurs réelles de x et de y.

Chaque conjuguée touchera la surface réelle suivant son contour apparent parallèlement à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des z pour rendre réelles les abscisses et les ordonnées de cette conjuguée; la surface réelle sera donc l'enveloppe de ses conjuguées.

Les conjuguées d'un ellipsoïde sont des hyperboloïdes continus ayant trois diamètres conjugués communs avec lui.

Les conjuguées de l'hyperboloïde à une nappe sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes, suivant que la direction qu'il faudrait donner à l'axe des z pour rendre leurs abscisses et ordonnées réelles est ou non comprise dans l'intérieur du cône asymptote; chacune de ces conjuguées a trois diamètres conjugués communs avec la surface réelle.

L'hyperboloïde à deux nappes a pour conjuguées des hyperboloïdes à une nappe ayant avec la surface réelle un système de diamètres conjugués communs. Les caractéristiques de ces conjuguées ne peuvent prendre toutes les valeurs, parce que lorsque l'axe des z est dirigé dans l'intérieur du cône asymptote, les valeurs de z correspondantes à des valeurs réelles de x et de y sont elles-mêmes toujours réelles.

Les conjuguées du paraboloïde elliptique sont des paraboloïdes hyperboliques de mêmes paramètres, et réciproquement.

CHAPITRE II.

Discussion des conjuguées d'une courbe ou d'une surface au moyen de l'équation qui les représente en même temps que le lieu réel.

8. *De la ligne droite.* — On étudie une courbe en la mettant en rapport avec des lignes plus simples; mais si la ligne qu'on veut étudier est représentée imaginairement, il faut que celle qu'on veut lui comparer le soit aussi.

Nous devions donc chercher, de la ligne droite, une équation qui la représentât en coordonnées imaginaires. Mais une même ligne donnée peut être représentée imaginairement par une infinité d'équations dif-

férentes, même sous la condition que le rapport des parties imaginaires des coordonnées d'un quelconque de ses points reste constant.

L'équation que nous cherchions, pour suffire à tous les besoins, devait contenir quatre constantes, puisqu'on devait pouvoir faire passer la droite qu'elle devait représenter par deux points choisis à volonté, dont les coordonnées contiendraient quatre quantités différentes.

Cette équation, outre la droite qu'on avait pour principal but de représenter, fournirait en tous cas une infinité d'autres lieux, et il était important que tous ces lieux fussent des lignes droites.

L'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

satisfait à toutes ces conditions : elle représente toutes les hyperboles, réduites à leurs asymptotes, conjuguées de l'ellipse nulle

$$y = mx + p + \sqrt{-(nx+q)^2}.$$

Toutes ces droites forment un faisceau divergent du point

$$x = -\frac{q}{n}, \quad y = -\frac{mq}{n} + p,$$

qui n'est autre que le point où se réduit l'ellipse, et se confondent avec les diamètres prolongés de cette courbe.

Cela posé, l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

représentant une infinité de droites, comme une équation quelconque $f(x, y) = 0$ représente une infinité de courbes, on voit qu'on pourra, entre l'une des courbes et l'une des droites, pourvu qu'elles aient même caractéristique, établir telle relation qu'on voudra; on coupera la courbe par la droite, ou rendra la droite tangente ou asymptote à la courbe, etc.

On ferait pour le cercle ce qu'on vient de faire pour la droite, si on voulait l'employer comme terme de comparaison à l'étude des courbes

imaginaires; mais, pour le moment, nous ne nous occuperons que de la droite.

9. *Intersections d'une droite et des conjuguées d'une courbe.* — La méthode par laquelle nous avons pu obliger l'équation d'une courbe à représenter en même temps qu'elle et au même moment, c'est-à-dire dans le même calcul, toutes les conjuguées de cette courbe, est fondée tout entière sur cette remarque : lorsque la même question est posée soit par rapport à la courbe réelle, soit par rapport à l'ensemble de ses conjuguées, le nombre des inconnues dans le second cas est double de ce qu'il serait dans le premier, il faut donc aussi que le nombre des données soit double; dans le premier cas les données réelles doivent être introduites dans les calculs sous forme réelle, dans le second elles devront l'être sous une forme imaginaire qui permette dans leur représentation une indétermination suffisante qu'on laissera subsister jusqu'à ce que, le calcul achevé, on veuille en rendre le résultat relatif à la courbe réelle ou à l'une de ses conjuguées désignée.

Ainsi la même droite $y = ax + b$ peut se trouver représentée par une infinité d'équations de la forme

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

et sous des caractéristiques différentes. Si donc on voulait avoir les points de rencontre de cette droite avec une courbe $f(x, y) = 0$ ou avec l'une de ses conjuguées, il faudrait l'introduire sous la forme indéterminée

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

en réservant les deux conditions qui établiraient son identité géométrique, savoir :

$$m + n + \frac{2n^2}{m - n - C} = a, \quad p + q + \frac{2qn}{m - n - C} = b,$$

qui se réduisent à

$$m + n = a, \quad p + q = b,$$

lorsque C est infini; on ferait le calcul d'élimination et de résolution sur les équations

$$f(x, y) = 0, \quad y = (m + n\sqrt{-1})\, n + p + q\sqrt{-1},$$

et l'on n'introduirait qu'à la fin, d'abord les deux conditions précédentes, ensuite celle que les coordonnées des points de rencontre appartinssent, comme on le voulait, à telle ou telle conjuguée.

10. *Diamètres.* — Soient x_1 et y_1 les demi-sommes des coordonnées de deux points quelconques pris sur une même conjuguée ou sur des conjuguées différentes d'une courbe $f(x, y) = 0$, le point $[x_1, y_1]$ sera toujours au milieu de la droite qui joindrait ces deux points. Si les deux points choisis appartiennent à une même conjuguée ayant pour caractéristique C, le point $[x_1, y_1]$ appartiendra aussi au système C; dans le cas contraire, les caractéristiques des trois points seront différentes.

Supposons maintenant que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\, x + p + q\sqrt{-1}$$

soit satisfaite par les coordonnées des points choisis, elle le serait aussi par $x = x_1$, $y = y_1$.

Cela posé, si nous remplacions dans l'équation

$$f(x, y) = 0$$

et dans l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\, x + p + q\sqrt{-1},$$

x par $x + x_1$ et y par $y + y_1$, les coordonnées nouvelles des deux points choisis deviendraient égales et de signes contraires et devraient satisfaire aux équations

$$f(x + x_1,\ y + y_1) = 0,$$
$$y = (m + n\sqrt{-1})\, x;$$

l'équation

$$f[x + x_1,\ (m + n\sqrt{-1})\, x + y_1] = 0$$

devrait donc avoir en x deux racines égales et de signes contraires : x_1, y_1 et $m+n\sqrt{-1}$ satisferaient donc à une certaine condition

$$F(x_1,\ y_1,\ m+n\sqrt{-1})=0$$

identique à l'équation générale des diamètres de la courbe réelle et qui fournirait les milieux de toutes les cordes qu'on pourrait imaginer entre les points représentés par l'équation

$$f(x,\ y)=0.$$

Mais il ne faudrait pas croire que m et n étant déterminées, les solutions d'un même système C de l'équation

$$F(x_1\ y_1,\ m+n\sqrt{-1})=0$$

fourniraient les différents points du diamètre qui couperait en parties égales les cordes menées dans la conjuguée C de la courbe proposée parallèlement à la droite

$$y=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)x=ax.$$

En général, pour obtenir la suite de ces points, il faudrait faire varier m et n en les assujettissant à la condition

$$m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}=a,$$

et, pour chaque système de valeurs de m et de n, ne prendre que certaines des solutions du système C de l'équation

$$F(x_1,\ y_1,\ m+n\sqrt{-1})=0.$$

11. *Centres.* — Si une courbe a un centre, il appartient aussi à toutes ses conjuguées, cela est évident; si elle n'en a pas, ses conjuguées n'en ont pas non plus, car si l'une d'elles en était douée, la courbe réelle, qui serait comprise parmi les conjuguées de celle-ci, en aurait donc aussi un.

12. *Tangentes.* — Celle des conjuguées d'une courbe $f(x, y) = 0$ qui passe au point $[x', y']$, dont les coordonnées satisfont à la condition $f(x', y') = 0$, a pour tangente en ce point celle des droites représentées par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x')$$

qui passe au même point.

En effet, sur chacune de ces lignes le point infiniment voisin du point $[x', y']$ se déterminerait par les mêmes conditions. Si

$$x' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

que

$$y' = \alpha'_1 + \beta' C\sqrt{-1},$$

et que

$$x'' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + d\alpha' + d\beta' \,.\, \sqrt{-1},$$
$$y'' = \alpha'_1 + \beta' C\sqrt{-1} + d\alpha'_1 + d\beta' . C\sqrt{-1},$$

désignent les coordonnées d'un point pris à une distance infiniment petite du point $[x', y']$ sur l'une ou l'autre des deux lignes considérées, les trois variables $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\alpha'_1$ seront dans l'un et l'autre cas assujetties aux deux mêmes conditions

$$\frac{d\alpha'_1 + d\beta' . C\sqrt{-1}}{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}} = -\frac{f'x'}{f'y'}.$$

Cela posé, si l'on veut d'un point exterieur ou parallèlement à une droite mener une tangente à une courbe $f(x, y) = 0$, ou à l'une quelconque de ses conjuguées, on pourra, en introduisant les données sous forme imaginaire, mettre en équation le problème dans toute sa généralité de la manière suivante :

1°. S'il s'agit de mener la tangente par un point extérieur donné, on introduira les coordonnées de ce point sous une forme indéterminée $[x'', y'']$, les quantités x'' et y'' n'étant encore assujetties qu'à ces deux conditions, que si l'on y remplaçait $\sqrt{-1}$ par 1, elles devinssent égales aux coordonnées réelles du point donné; x', y' désignant les coordonnées du point de contact, la tangente cherchée serait repré-

sentée, sous le même coefficient caractéristique que le point $[x'y']$, par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x');$$

on exprimera donc que $x = x''$, $y = y''$ vérifient cette équation, ce qui donnera, pour déterminer x' et y', l'équation

$$y'' - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x'' - x'),$$

que l'on adjoindra à l'équation

$$f(x', y') = 0.$$

Ces deux équations étant résolues, on achèvera de déterminer x'' et y'' en exprimant que les deux points $[x''y'']$, $[x'y']$ appartiennent au même système que la conjuguée à laquelle on voulait mener la tangente.

2°. S'il s'agit de mener la tangente parallèlement à une droite donnée $y = ax$, on introduira le coefficient angulaire de cette droite sous une forme indéterminée $m + n\sqrt{-1}$; x' y' désignant les coordonnées du point de contact, la tangente cherchée serait représentée, sous le même coefficient caractéristique que le point $[x'y']$, par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x');$$

on exprimera donc que $-\frac{f'x'}{f'y'} = m + n\sqrt{-1}$, et cette équation, combinée avec $f(x', y') = 0$, permettra de déterminer x' et y'; alors si c'était à la conjuguée ayant pour caractéristique C qu'on voulût mener une tangente, on déterminera m et n par les conditions que

$$m + n + \frac{2n^2}{m - n - C} = a,$$

et que le point $[x'y']$ appartienne à la conjuguée C.

3°. Si l'on voulait avoir, de toutes les tangentes à la courbe pro-

posée et à ses conjuguées, une équation générale ne contenant d'autre constante arbitraire que le coefficient angulaire de chaque tangente, il suffirait de résoudre la question par rapport à la courbe réelle; si

$$y = mx + \varphi(m)$$

est l'équation générale des tangentes à la courbe $f(x, y) = 0$,

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

sera évidemment l'équation générale des tangentes aux conjuguées de cette courbe.

On pourra, si on le veut, adjoindre à cette équation une condition qui fixe le point de contact sur une conjuguée déterminée.

13. *Asymptotes.* — Si, en suivant la règle pour déterminer les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on a trouvé pour l'une d'elles une équation à coefficients imaginaires

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}.$$

Cette équation représentera une infinité de droites, et chacune d'elles sera évidemment asymptote à la conjuguée de même caractéristique de la courbe proposée.

Si l'une des équations obtenues avait son coefficient angulaire réel, elle représenterait une seule droite asymptote commune à toutes les conjuguées, parce que toutes les solutions imaginaires d'une équation

$$y = ax + p + q\sqrt{-1}$$

ne peuvent fournir que les points de la seule droite

$$y = ax + p + q.$$

Si l'une des équations obtenues était entièrement réelle, elle représenterait une droite asymptote en même temps à la courbe réelle et à celle de ses conjuguées qui aurait pour caractéristique le coefficient angulaire de cette droite, mais ne donnerait rien pour les autres conjuguées qui manqueraient de l'asymptote correspondante, parce que toutes les

solutions imaginaires d'une équation $y = ax + b$, lorsque a et b sont réels, appartiennent au système $C = a$.

14. *Du plan.* — Les solutions imaginaires, de mêmes caractéristiques C et C′, d'une équation linéaire à trois variables

$$(M + N\sqrt{-1})\,x + (P + Q\sqrt{-1})\,y + (R + S\sqrt{-1})\,z + 1 = 0,$$

doivent encore fournir les points d'une surface plane, car l'élimination de α, α', α'', β entre les équations

$$(M + N\sqrt{-1})\left(\alpha + \frac{\beta}{C}\sqrt{-1}\right) + (P + Q\sqrt{-1})\left(\alpha' + \frac{\beta}{C'}\sqrt{-1}\right)$$
$$+ (R + S\sqrt{-1})(\alpha'' + \beta\sqrt{-1}) + 1 = 0,$$

$$x = \alpha + \frac{\beta}{C},$$

$$y = \alpha' + \frac{\beta}{C'},$$

$$z = \alpha'' + \beta,$$

donnera nécessairement une équation linéaire entre x, y et z.

Tous les plans représentés par l'équation

$$(M + N\sqrt{-1})\,x + (P + Q\sqrt{-1})\,y + (R + S\sqrt{-1})\,z + 1 = 0,$$

passent par la droite réelle

$$Mx + Py + Rz + 1 = 0,$$
$$Nx + Qy + Sz = 0.$$

15. *Des lignes.* — Deux équations à coefficients réels ou imaginaires, prises au hasard, ne fourniraient généralement qu'un nombre limité de solutions communes appartenant à un même système [C, C′]; il faut, pour que le contraire arrive, que les quatre équations dans lesquelles se décomposeraient les proposées, lorsqu'on y supposerait les variables imaginaires, se réduisent à trois; si ce fait se présente, quelles que soient les caractéristiques C et C′, le système des deux

équations peut être regardé comme représentant une infinité d'infinités de lignes; si cela n'a lieu qu'autant que C et C′ satisfassent à une certaine condition, le système des deux équations ne représente plus qu'une infinité de lignes, plus une infinité de points isolés; enfin, si les quatre équations restent toujours distinctes, quels que soient C et C′, le système des deux proposées ne représente qu'une infinité d'infinités de points isolés.

16. *De la ligne droite.* — Le système de deux équations linéaires, telles que

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + q\sqrt{-1},$$
$$y = (m' + n'\sqrt{-1})z + p' + q'\sqrt{-1},$$

dans lesquelles $\frac{n}{n'} = \frac{q}{q'}$, représente un faisceau de droites contenues dans le plan

$$n'x - ny = (n'm - nm')z + n'p - np';$$

les deux caractéristiques d'une de ces droites sont liées par la relation

$$n'C - nC' = n'm - nm'.$$

17. *Plan tangent.* — Le plan tangent à une surface imaginaire en un point x', y', z' est, comme si ce point appartenait à la surface réelle, représenté par l'équation

$$(x - x')\frac{dx'}{dz'} + (y - y')\frac{dy'}{dz'} + z - z' = 0.$$

18. *Tangentes.* — La tangente à une courbe à double courbure imaginaire et son plan osculateur sont représentés par les mêmes équations qui les fourniraient réels.

19. *Remarque.* — Nous ne prétendons nullement imposer comme seuls rationnels, seuls pratiques, les principes qui nous ont guidé dans ce qui précède. En matière d'interprétation des solutions imaginaires des équations, c'est par l'utilité des résultats obtenus qu'on devra toujours juger des méthodes proposées : nous n'avons aucune opinion exclusive à cet égard.

Nous ne voyons pas trop comment on pourrait substituer à la nôtre une manière différente de construire le point correspondant à une solution imaginaire de l'équation mise à l'étude ; mais quelque intérêt qui s'attache aux lieux que nous avons étudiés, par ce fait seul qu'ils se substituent toujours au lieu réel dans tous les cas où celui-ci n'a plus de point qui jouisse de la propriété demandée, il est évident qu'on pourra avoir à en étudier d'autres renfermés dans les mêmes équations, mais définis par de nouvelles conditions autres que celle de la constance dans les rapports des parties imaginaires de la variable dépendante et des variables indépendantes.

Au reste, la plupart des propriétés que nous avons reconnues dans les lieux que nous avons étudiés, conviendraient aussi à tous ceux qu'on pourrait définir d'une autre manière.

Ainsi, quelque relation complémentaire qu'on établisse entre les parties réelles et imaginaires des variables x et y, dans les deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x'),$$

pour y réduire l'indétermination au premier ordre, toujours celui des lieux représentés par la seconde équation, qui passera au point $[x'\, y']$, sera tangent en ce point à celui des lieux de même espèce, et passant par le même point que représenterait la première.

De même, si en recherchant les asymptotes de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

on a trouvé pour l'une d'elles une équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

quelque relation complémentaire qu'on établisse à volonté entre les parties imaginaires de x et de y, dans les deux équations, le lieu représenté dans un système par la seconde sera toujours asymptote au lieu représenté par la première dans le même système.

20. *Enveloppe imaginaire des conjuguées.* — Ce que nous venons de dire des lieux que pourrait fournir l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x'),$$

si l'on en associait les solutions suivant une règle choisie à volonté, va nous conduire à un résultat important : toutes les courbes imaginaires, partant du point $[x' y']$, qui seraient définies par l'équation $f(x, y) = 0$ et par diverses conditions complémentaires qu'on aurait successivement établies entre les parties réelles et imaginaires de x et de y, doivent être tangentes respectivement à celles qui partiraient également du point $[x' y']$ et qui seraient représentées par l'équation

$$y - y' = -\frac{f'x'}{f'y'}(x - x'),$$

à laquelle on aurait adjoint les mêmes relations complémentaires; mais lorsque le coefficient angulaire $-\frac{f'x'}{f'y'}$ est réel, toutes ces courbes deviennent tangentes entre elles au point $[x' y']$, et par conséquent à la conjuguée qui y passe.

En effet, une équation

$$y = ax + p + q\sqrt{-1},$$

dans laquelle a est réel, ne peut fournir que des points appartenant à la droite $y = ax + p + q$; car si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ en forment une solution

$$\alpha' = a\alpha + p \quad \text{et} \quad \beta' = a\beta + q,$$

par conséquent

$$\alpha' + \beta' = a(\alpha + \beta) + p + q.$$

Les solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, qui satisfont à la condition que $-\frac{f'x}{f'y}$ soit réel, sont donc telles, que toutes les lignes imaginaires qui passent aux points qu'elles fournissent, si elles résultent de l'équation $f(x, y) = 0$, y ont la même tangente.

Cette propriété appartient évidemment à tous les points situés sur la

courbe qui limite la portion du plan couverte par les points représentés par les solutions imaginaires de l'équation $f(x, y) = 0$.

La condition $-\frac{f'x}{f'y} =$ réel est donc l'équation de cette courbe.

Les conjuguées d'une surface peuvent aussi avoir une enveloppe imaginaire; ainsi les ellipsoïdes imaginaires conjugués d'un hyperboloïde continu ont pour seconde enveloppe l'hyperboloïde à deux nappes de mêmes axes, changés de réels en imaginaires, et réciproquement. Cette seconde enveloppe se trouve, comme en géométrie plane, par la condition que les deux dérivées partielles de z, par rapport à x et à y, soient réelles; mais en général elle ne touche plus chaque conjuguée qu'en un point, tandis que la surface réelle les touche suivant des courbes tout entières.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. O. SCHLÖMILCH A M. LIOUVILLE.

La Note de M. E. Roche, insérée dans un des derniers cahiers de votre Journal (juillet 1858), me donne l'occasion de remarquer que la formule de M. Roche n'est qu'un cas spécial d'une formule très-générale que j'ai publiée il y a dix ans dans mon *Handbuch der Differentialrechnung*, etc., Greisswald, 1847-1848. Ce livre pouvant ne pas être connu en France, je me permets d'en donner un extrait relatif à l'objet mentionné.

En faisant usage de la méthode employée par M. Cauchy pour démontrer la formule

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'[a+\varepsilon(b-a)],\quad 1>\varepsilon>0,$$

on parvient aisément à la formule plus générale

$$(1)\qquad \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'[a+\varepsilon(b-a)]}{\psi'[a+\varepsilon(b-a)]}:$$

elle exige, 1° que les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ soient finies et continues entre les limites $x=a$ et $x=b$, et 2° que la dérivée $\psi'(x)$ ne change pas de signe entre ces limites. En prenant $a=0$ et $b=h$, l'équation (1) devient

$$(2)\qquad \varphi(h)=\varphi(0)+\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'(\varepsilon h)}\varphi'(\varepsilon h).$$

Admettant donc $\varphi(h)$ comme somme de la série

$$f(a-h)+\frac{h}{1}f'(a-h)+\frac{h^2}{1.2}f''(a-h)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a-h),$$

on aura

$$\varphi(0) = f(a),\quad \frac{d\varphi(h)}{dh} = \varphi'(h) = -\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a-h),$$

et, en vertu de la formule (2),

$$\varphi(h) = f(a) - \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'(\varepsilon h)} \frac{(\varepsilon h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a - \varepsilon h).$$

Enfin, à l'aide des substitutions $a = x + h$ et $\varepsilon = 1 - \theta$, on parvient à l'équation

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$= f(x+h) - \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'[(1-\theta)h]} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x + \theta h),$$

dans laquelle la fonction ψ est arbitraire, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions énoncées. Le cas spécial $\psi(h) = h^p$ est celui que M. Roche a traité.

Je profite de cette occasion pour vous envoyer en outre la Note ci-jointe, qui aura peut-être quelque intérêt, vu la simplicité des résultats obtenus.

SUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE DANS LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION;

Par M. O. SCHLÖMILCH.

On connaît suffisamment la méthode élémentaire à l'aide de laquelle on peut trouver les dérivées

$$\frac{du}{dz},\quad \frac{d^2u}{dz^2},\quad \frac{d^3u}{dz^3},\ldots$$

de la fonction $u = F(z)$, dans le cas où z cesse d'être la variable indé-

pendante et devient fonction d'une autre variable x. En posant

$$(1) \qquad u = F(z), \quad z = \varphi(x), \quad F[\varphi(x)] = f(x),$$

on obtient les équations

$$\frac{du}{dz} = F'[\varphi(x)] = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = F''[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)f''(x) - \varphi''(x)f'(x)}{\varphi'(x)^3},$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = F'''[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)^2 f'''(x) - 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(x) + [3\varphi''(x)^2 - \varphi'(x)\varphi'''(x)]f'(x)}{\varphi'(x)^5},$$

. . . .

Comme ces formules deviennent très-compliquées, on se peut proposer le problème de les simplifier, en indiquant la loi de leur formation; nous ferons voir que cette loi se présente sous une forme assez élégante. Pour cela nous remarquons d'abord que l'expression $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ est ce que devient

$$\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)} f'(x+\rho), \quad \text{pour } \rho = 0;$$

on a de plus

$$\frac{\varphi'(x)f''(x) - \varphi''(x)f'(x)}{\varphi'(x)^3} = D_\rho\left[\left(\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)}\right)^2 f'(x+\rho)\right], \text{ pour } \rho = 0,$$

et on en conclura par induction que la formule générale sera

$$(2) \qquad \frac{d^n u}{dz^n} = F^{(n)}[\varphi(x)] = D_\rho^{n-1}\left[\left(\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)}\right)^n f'(x+\rho)\right]_{(0)},$$

dans laquelle l'indice (o) veut dire que l'on doit prendre $\rho = 0$ après avoir achevé les différentiations par rapport à ρ.

La démonstration de notre formule repose sur une autre formule que nous allons développer. En posant, pour abréger,

$$\Omega = \frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)},$$

on a identiquement

$$\frac{\rho}{\Omega^2}D_x\Omega - \frac{\rho}{\Omega^2}D_\rho\Omega + \frac{1}{\Omega} = \varphi'(x).$$

Nous multiplions les deux membres de cette équation par Ω^{n+1}, et après cela nous différentions k fois par rapport à ρ, en faisant usage de la formule

$$D_\rho^k(\rho\varphi) = \rho D_\rho^k\varphi + kD_\rho^{k-1}\varphi;$$

de cette manière nous parvenons à l'équation

$$\begin{aligned}&\rho D_\rho^k(\Omega^{n-1}D_x\Omega) + kD_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_x\Omega)\\ &- \rho D_\rho^k(\Omega^{n-1}D_\rho\Omega) - kD_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_\rho\Omega) + D_\rho^k\Omega^n = \varphi'(x)D_\rho^k\Omega^{n+1}.\end{aligned}$$

Dans le cas de $\rho = 0$, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned}&k\left[D_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_x\Omega)\right]_{(0)}\\ &- k\left[D_\rho^{k-1}(\Omega^{n-1}D_\rho\Omega)\right]_{(0)} + \left[D_\rho^k\Omega^n\right]_{(0)} = \varphi'(x)\left[D_\rho^k\Omega^{n+1}\right]_{(0)},\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{k}{n}\left[D_\rho^{k-1}D_x\Omega^n\right]_{(0)} + \frac{n-k}{n}\left[D_\rho^k\Omega^n\right]_{(0)} = \varphi'(x)\left[D_\rho^k\Omega^{n+1}\right]_{(0)}.$$

En introduisant le facteur

$$(n)_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

nous aurons enfin

$$(4)\quad (n-1)_{k-1}\left[D_\rho^{k-1}D_x\Omega^n\right] + (n-1)_k\left[D_\rho^k\Omega^n\right]_{(0)} = (n)_k\varphi'(x)\left[D_\rho^k\Omega^{n+1}\right]_{(0)}.$$

Maintenant la formule (2) qu'on sait être exacte pour $n = 1$ peut être aisément démontrée pour n quelconque par le raisonnement si connu où l'on passe d'une valeur de n à la valeur suivante $n+1$. On a d'abord

$$\begin{aligned}F^{(n)}[\varphi(x)] &= \{D_\rho^{n-1}[\Omega^n f'(x+\rho)]\}_{(0)}\\ &= [\Omega^n]_{(0)}f^{(n)}(x) + (n-1)_1[D_\rho\Omega^n]_{(0)}f^{(n-1)}(x)\\ &\quad + (n-1)_2[D_\rho^2\Omega^n]_{(0)}f^{(n-2)}(x) + \ldots;\end{aligned}$$

la dérivée de cette équation, prise par rapport à x, est

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}^{(n+1)}[\varphi(x)].\varphi'(x)\\
&= [\Omega^n]_{(0)} f^{(n+1)}(x) + \{[\mathrm{D}_x\,\Omega^n]_{(0)} + (n-1)_1[\mathrm{D}_\rho\,\Omega^n]_{(0)}\} f^{(n)}(x)\\
&\quad + \{(n-1)_1[\mathrm{D}_\rho \mathrm{D}_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_2[\mathrm{D}_\rho^2\,\Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-1)}(x)\\
&\quad + \{(n-1)_2[\mathrm{D}_\rho^2 \mathrm{D}_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_3[\mathrm{D}_\rho^3\Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-2)}(x)\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En remplaçant $[\Omega^n]_{(0)}$ par $\varphi'(x)[\Omega^{n+1}]_{(0)}$ et en faisant usage de la formule (4), on trouve l'équation

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}^{(n+1)}[\varphi(x)] &= [\Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n+1)}(x) + (n)_1[\mathrm{D}_\rho\,\Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n)}(x)\\
&\quad + (n)_2[\mathrm{D}_\rho^2\,\Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n-1)}(x) + \ldots\\
&= \{\mathrm{D}_\rho^n[\Omega^{n+1} f'(x+\rho)]\}_{(0)},
\end{aligned}$$

qui est la même que si l'on avait écrit $n+1$ au lieu de n dans la formule primitive. Nous remarquerons encore que l'on peut la présenter sous la forme

$$(5)\quad \mathrm{F}[\varphi(x)] = f(x),\quad \mathrm{F}^{(n)}[\varphi(x)] = \mathrm{D}_\xi^{n-1}\left\{\left[\frac{\xi - x}{\varphi(\xi)-\varphi(x)}\right]^n f'(\xi)\right\}_{(\xi = x)}.$$

Nous ferons quelques applications de ce théorème.

L'équation

$$x = \varphi(y),$$

résolue par rapport à y, donnerait une valeur de la forme

$$y = \psi(x),$$

et toute fonction de y serait aussi une fonction de x; donc si l'on considère la fonction

$$f(y) = \mathrm{F}(x),$$

on a

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = \frac{d^n \mathrm{F}(x)}{dx^n} = \mathrm{F}^{(n)}(x) = \mathrm{F}^{(n)}[\varphi(y)].$$

On voit qu'il suffit d'écrire y au lieu de x dans la formule (5), ce qui

donne

$$(6)\qquad \frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_\xi^{n-1}\left\{\left[\frac{\xi - y}{\varphi(\xi) - \varphi(y)}\right]^n f'(\xi)\right\}_{(\xi=y)}.$$

Le cas le plus simple est $f(y) = y$; la différentiation de la fonction inverse, déterminée par l'équation

$$x = \varphi(y),$$

se fait donc à l'aide de la formule

$$(7)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = D_\xi^{n-1}\left[\frac{\xi - y}{\varphi(\xi) - \varphi(y)}\right]^n_{(\xi=y)}.$$

La formule (5) peut aussi servir pour trouver immédiatement les théorèmes de Burmann et de Lagrange; en effet cette déduction n'est qu'une simple transformation du théorème de Maclaurin que nous présentons sous la forme

$$F(z) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} z + \frac{F''(0)}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} z^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^z (z - t)^n F^{(n+1)}(t)\,dt.$$

En prenant

$$z = \varphi(x),\quad F(z) = F[\varphi(x)] = f(x),$$

on a d'abord

$$F^{(m)}(z) = D_\xi^{m-1}\left\{\left[\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)}\right]^m f'(\xi)\right\}_{(\xi=x)};$$

on en déduit $F^{(m)}(0)$ en prenant pour x une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Soit a une de ces racines, alors on trouve

$$F^{(m)}(0) = D_\xi^{m-1}\left\{\left[\frac{\xi - a}{\varphi(\xi)}\right]^m f'(\xi)\right\}_{(\xi=a)},$$

et, par conséquent,

$$(8)\quad f(x) = f(a) + \frac{A_1}{1}\varphi(x) + \frac{A_2}{1.2}\varphi^2(x) + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x) + R_n,$$

$$(9)\qquad A_m = D_x^{m-1}\left\{\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}\right]^m f'(x)\right\}_{(x=a)}.$$

C'est la formule de Burmann présentée à l'Institut l'an 1796. Quant au reste R_n, il est

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^{\varphi(x)} [\varphi(x) - t]^n F^{(n+1)}(t)\,dt,$$

ou bien, si l'on fait la substitution $t = \varphi(u)$,

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(u)]^n F^{(n+1)}[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du;$$

mais il faut remarquer que les limites $u = a$ et $u = x$ ne sont justes que sous la condition que $\varphi'(u)$ ne change pas de signe entre $u = a$ et $u = x$, parce que t est une quantité qui croît ou qui décroît de $t = 0$ à $t = \varphi(x)$. Enfin la formule (2) donne

$$(10)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(u)]^n \varphi'(u)\,du\, D_\rho^n\left\{\left[\frac{\rho}{\varphi(u+\rho) - \varphi(u)}\right]^{n+1} f'(u+\rho)\right\}_{(0)}.$$

Remplaçons maintenant x par y et $\varphi(x)$ par $\frac{y-a}{\psi(y)}$; nous aurons alors, en vertu des formules (8) et (9),

$$(11)\qquad f(y) = f(a) + \frac{A_1}{1}\frac{y-a}{\psi(y)} + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}\left(\frac{y-a}{\psi(y)}\right)^n + R_n,$$

$$(12)\qquad A_m = D_y^{m-1}\{\psi(y)^m f'(y)\}_{(y=a)};$$

à l'aide de la substitution $\frac{y-a}{\psi(y)} = x$, on en déduit immédiatement le théorème de Lagrange.

NOTE

SUR

LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ PAR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Après avoir montré que l'équation du cinquième degré peut être résolue par les fonctions elliptiques, M. Hermite a donné des formules pour résoudre par les mêmes fonctions les équations du quatrième degré dont l'invariant quadratique est nul. Il se présentait donc un problème important, du moins théoriquement, celui qui consiste à trouver pour une équation du quatrième degré dont l'invariant quadratique n'est pas nul, une transformée pour laquelle cet invariant fût égal à zéro. M. Hermite a indiqué dans les *Comptes rendus* du 24 mai 1858 une solution savante et très-générale, mais qui paraît entraîner des calculs assez longs. L'objet de cette Note est d'indiquer une solution effective, fort courte comparativement. Mais néanmoins quand on voudra trouver en nombres les valeurs des racines, c'est toujours à la formule des éléments qu'il faudra recourir.

PROPOSITION I. — *Si dans une équation*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} + \ldots \\ + m a_{m-1} x + a_m = 0. \end{aligned} \right.$$

on pose

$$x = y + h,$$

d'où

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f(y) = b_0 y^m + m b_1 y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} b_2 y^{m-2} + \ldots \\ + m b_{m-1} y + b_m = 0. \end{aligned} \right.$$

on aura

$$b_0 = a_0,$$
$$b_1 = a_0 h + a_1,$$
$$b_2 = a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2,$$
$$b_3 = a_0 h^3 + 3a_1 h^2 + 3a_2 h + a_3,$$
$$b_4 = a_0 h^4 + 4a_1 h^3 + 6a_2 h^2 + 4a_3 h + a_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

C'est la conséquence immédiate de la substitution.

Proposition II. — *Si dans l'équation* (1) *on pose*

$$a_0 x + a_1 = X,$$

on aura

$$(3)\quad X^m + \frac{m(m-1)}{1.2}A_2 X^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}A_3 X^{m-3} + \ldots + A_m = 0,$$

et les fonctions $A_2, A_3, \ldots, A_m$ *des coefficients* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ *ne changeront pas quand on remplacera* a_0, a_1, a_2, etc., par b_0, b_1, b_2, etc.

Si l'on faisait disparaître le second terme de l'équation (2), l'inconnue $Y = b_0 y + b_1$ serait

$$b_0 y + b_1 = a_0(x-h) + a_0 h + a_1 = a_0 x + a_1 = X.$$

on retrouve donc l'équation (3), d'où la propriété énoncée pour les fonctions A_2, A_3, etc.

Dans le quatrième degré, l'équation (3) devient

$$X^4 + 6A_2 X^2 + 4A_3 X + A_4 = 0,$$

et l'on a

$$A_2 = a_0 a_2 - a_1^2,$$
$$A_3 = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3,$$
$$A_4 = a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4$$
$$= a_0^2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) - 3(a_0 a_2 - a_1^2)^2;$$

or

$$a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = \mathrm{I}$$

est ce qu'on nomme l'invariant quadratique. On a

$$a_0^2 \mathrm{I} = \mathrm{A}_4 + 3\mathrm{A}_2^2.$$

Cet invariant reste donc le même pour l'équation en y.

Il en sera de même de l'invariant cubique

$$\mathrm{J} = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3,$$

parce que l'on a

$$a_0^3 \mathrm{J} = \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_3^2 - \mathrm{A}_2^3.$$

Proposition III.—*L'invariant quadratique de l'équation aux carrés des racines de l'équation*

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, en posant $x^2 = u$, *de l'équation*

$$(a_0 u^2 + 6a_2 u + a_4)^2 - 16u(a_1 u + a_3)^2$$
$$= \mathrm{C}_0 u^4 + 4\mathrm{C}_1 u^3 + 6\mathrm{C}_2 u^2 + 4\mathrm{C}_3 u + \mathrm{C}_4 = 0$$

est égal à

$$\frac{4}{3}(12\mathrm{I} a_2^2 - 36\mathrm{J} a_2 + \mathrm{I}^2).$$

C'est le résultat du développement de l'invariant

$$\mathrm{C}_0 \mathrm{C}_4 - 4\mathrm{C}_1 \mathrm{C}_3 + 3\mathrm{C}_2^2.$$

Problème. — *Étant donnée l'équation*

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

dont l'invariant quadratique n'est pas nul, trouver une transformée

$$b_0 y^4 + 4b_1 y^3 + 6b_2 y^2 + 4b_3 y + b_4 = 0$$

dont l'invariant quadratique soit nul.

Solution. — Il faut poser d'après les propositions précédentes

$$12 I b_2^2 - 36 J b + I^2 = 0,$$

d'où

$$b_2 = a_0 h^2 + 2 a_1 h + a_2 = \frac{1}{2I}\left(3J \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}\sqrt{I^3 - 27J^2}\right).$$

On reconnaît ici la même fonction de I et de J qui se présente dans la solution de M. Hermite (*Comptes rendus*, p. 965).

Ayant h, on connaîtra les coefficients de l'équation en

$$u = y^2 = (x - h)^2,$$

et par suite y et x.

Dans la pratique il faudrait fixer le choix de la valeur de h, mais ce qu'il y a de plus court sera toujours l'emploi de la formule des éléments. Il est bien évident que c'est au point de vue théorique qu'il faut considérer la belle découverte de la résolution des équations des cinquième et quatrième degrés par les fonctions elliptiques.

NOTE

SUR

LA THÉORIE DE LA ROUE HYDRAULIQUE EN DESSOUS A AUBES PLANES;

PAR M. RACHMANINOW,
Professeur à l'Université de Kiew.

1. Les expériences nous apprennent que le travail des roues hydrauliques en dessous à aubes planes n'excède pas les 0,3 du travail moteur. Néanmoins ces roues sont en grand usage dans les lieux où la chute d'eau est de faible hauteur et d'un grand débit. Leur bon marché et la simplicité de leur construction soutiennent leur usage dans les lieux où l'on manque de constructeurs habiles.

Ces raisons seraient suffisantes pour motiver un travail théorique sur ces roues, mais il en est une plus importante. La roue à aubes planes a en effet été la base du développement de la théorie des machines en général. Les plus célèbres hydrauliciens en ont fait l'objet de leurs investigations, en cherchant à faire accorder la théorie avec l'expérience. Mais il faut malheureusement reconnaître que les formules données jusqu'ici, et dans lesquelles on prend seulement en considération la perte du travail par le choc et par la conservation de la vitesse de l'eau qui s'échappe de la roue, n'expliquent qu'incomplétement les variations du travail utile et de la vitesse la plus avantageuse. D'ailleurs ces formules ne contiennent pas les dimensions de la roue, ce qui montre combien elles sont loin d'être suffisantes.

Gerstner, le premier, puis Redtenbacher, ont exposé des théories en cherchant à se mettre d'accord avec les données de l'expérience; il ressort de leurs formules que la vitesse de la roue aux extrémités des palettes doit être moindre que la moitié de la vitesse de l'eau dans le coursier d'amont : ce que l'expérience ne vérifie pas. C'est une étude attentive des expériences faites sur la roue en dessous par des obser-

vateurs habiles, qui m'a conduit à quelques changements de la théorie de Gerstner, avec lesquels je vais exposer ici la théorie de la roue hydraulique en dessous à aubes planes.

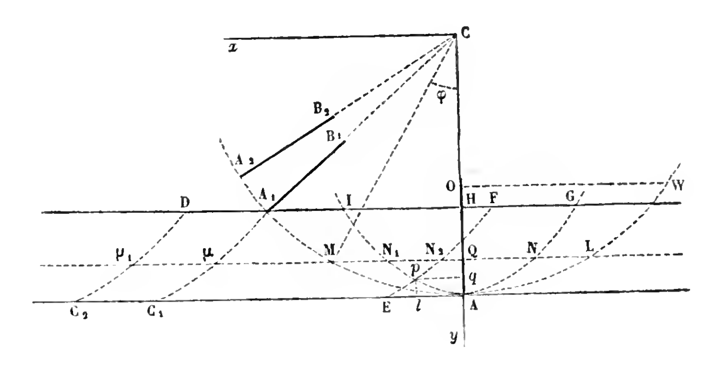
Avant d'entrer en matière, j'indiquerai les résultats des expériences. Smeaton a donné six séries d'expériences; dans chaque série la hauteur de l'orifice était constante, et la hauteur du niveau d'amont variait. Il résulte de ces tableaux, 1° que la hauteur de l'orifice étant constante, le rapport de la vitesse de la roue à celle du courant s'accroît quand la hauteur du niveau d'amont diminue; 2° que la hauteur du niveau d'amont restant constante, le même rapport s'accroît quand on augmente la hauteur de l'orifice. Ce rapport peut atteindre et même dépasser 0,5 quand on diminue la hauteur du niveau d'amont en même temps qu'on augmente la hauteur de l'orifice.

L'abbé Bossut a conclu, d'expériences nombreuses et précises, que le meilleur nombre qu'on puisse prendre de palettes simultanément immergées, est toujours au moins égal à trois.

2. L'eau qu'un coursier horizontal ou légèrement incliné amène sous la roue en dessous à aubes planes, n'est pas toute employée pour faire tourner cette roue, en frappant ses palettes; il y en a une partie qui passe sous la roue en pure perte, et c'est le volume de cette eau inactive que nous allons déterminer, pour trouver ensuite le volume de celle qui exerce son action sur les palettes. La perte de l'eau, sous ce point de vue, dépend de deux causes : 1° du mouvement des palettes suivant la circonférence de la roue, et 2° du jeu qui existe nécessairement entre les bords des aubes et le coursier. Comme la première de ces pertes dépend de la construction du coursier, nous considérerons d'abord le coursier rectiligne et horizontal.

Nous supposerons que tous les filets du courant arrivent sur la roue régulièrement avec la vitesse V. Soient A_1B_1 et A_2B_2 deux palettes consécutives, dont la distance mesurée sur la circonférence extérieure de la roue est $A_1A_2 = e$; supposons que l'extrémité de la palette A_1B_1 touche le niveau horizontal du courant au point A_1. Désignant par v la vitesse uniforme de la circonférence extérieure de la roue, nous voyons que quand le bord de la palette A_1 décrira un arc du cercle A_1M, la molécule liquide μ, qui viendra toucher la palette au point M,

parcourra l'espace $\mu M = \frac{V}{v} \cdot A_1 M$, car les étendues parcourues dans



le même temps par le bord de la palette et la molécule liquide sont en raison directe des vitesses correspondantes. En appliquant le même raisonnement aux autres positions de la palette $A_1 B_1$, nous pourrons construire la courbe $A_1 C_1$, sur laquelle se trouvent, au moment de l'immersion du bord de la palette dans le courant, toutes les molécules liquides, qui atteindront le bord de la palette pendant le mouvement descendant de celle-ci depuis A_1 jusqu'au point A le plus bas de sa course. En prenant, à partir des points de la ligne $A_1 C_1$ les distances horizontales $A_1 D$, $\mu\mu_1$, $C_1 C_2, \ldots$, égales à $e\frac{V}{v}$, nous construirons la courbe DC_2, sur laquelle se trouvent toutes les molécules, qui toucheront le bord A_2 de la palette suivante $A_2 B_2$; cette courbe sera tout à fait égale à $A_1 C_1$. Ainsi, $A_1 C_1 C_2 D$ nous représente la coupe verticale et longitudinale du volume d'eau qui passera entre les palettes consécutives $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$. Quand la palette $A_1 B_1$ décrira l'arc $A_1 A$ et se trouvera dans la position verticale, le plan $A_1 C_1 C_2 D$ se déplacera horizontalement, et prendra la position AGEF, après avoir parcouru l'étendue $C_1 A = A A_1 \cdot \frac{V}{v}$; AG et EF sont tout à fait égales aux courbes $A_1 C_1$ et DC_2; $AE = C_1 C_2 = e \cdot \frac{V}{v}$.

Au point A la palette commence son mouvement ascendant. Quand elle décrira l'arc AL, la molécule liquide, qui viendra toucher la palette au point L, traversera l'étendue $N_1 L = \frac{V}{v} \cdot AL$; par conséquent,

quand la palette se trouve dans la position verticale AH, cette molécule liquide se trouve au point N_1. En raisonnant de la même manière relativement à d'autres molécules liquides, nous construirons la ligne AN_1I, sur laquelle se trouveront toutes les molécules qui doivent toucher le bord de la palette dans son mouvement ascendant. Puisque la ligne EF est celle des molécules qui entreront les dernières dans l'espace compris entre ces deux palettes consécutives A_1B_1 et A_2B_2, et que la ligne AI est celle des molécules qui atteindront les dernières les palettes A_1B_1, le plan ApE représente la coupe longitudinale et verticale du volume d'eau qui passera sur le coursier sans choquer la palette A_1B_1. Déterminons la grandeur de ce plan. Nous voyons, d'après la figure, que

$$MN = \mu N - \mu M = AA_1 \cdot \frac{V}{v} - A_1M \cdot \frac{V}{v} = MA \cdot \frac{V}{v} = AL \cdot \frac{V}{v} = LN_1,$$

par conséquent,

$$MN_1 = NL, \quad N_1Q = QN.$$

Ainsi les deux courbes ANG et AN_1I sont symétriquement disposées relativement à la verticale CA. Prenons l'origine des coordonnées au centre C de la roue; la verticale sera l'axe des y et l'horizontale l'axe des x. Nous désignerons par φ l'angle MCA correspondant au point N_1 de la courbe AN_1I; par R le rayon de la circonférence extérieure de la roue. Les coordonnées du point N_1 de la courbe AN_1I seront

$$x = N_1Q = LN_1 - QL = R\left(\varphi\frac{V}{v} - \sin\varphi\right),$$

(1) $$y = R.\cos\varphi.$$

Mais puisque nous considérons seulement la partie de la courbe qui est immergée dans le courant, nous pouvons, dans la série

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{2.3} + \ldots,$$

nous limiter aux termes du second degré à cause de la petitesse de l'angle φ, et alors

(2) $$x = R.\sin\varphi \cdot \left(\frac{V}{v} - 1\right).$$

Eliminant φ entre les équations (1) et (2), nous trouverons pour la courbe IN_1ANG

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2}{R^2\left(\frac{V}{v} - 1\right)^2} = 1,$$

équation d'une ellipse dont le demi-axe vertical $= R$ et le demi-axe horizontal $= R\left(\frac{V}{v} - 1\right)$.

Pour un point N_2 de la courbe EF nous aurons les coordonnées

$$(3)\quad x = NN_2 - QN = e\frac{V}{v} - R\left(\varphi\frac{V}{v} - \sin\varphi\right) = e\frac{V}{v} - R\sin\varphi\left(\frac{V}{v} - 1\right),$$
$$y = R.\cos\varphi.$$

Des équations (2) et (3) on déduit, en appelant φ_1 l'angle qui correspond au point d'intersection p des courbes EF et AI_1, la condition

$$R.\sin\varphi_1\left(\frac{V}{v} - 1\right) = e\frac{V}{v} - R.\sin\varphi_1\left(\frac{V}{v} - 1\right).$$

Cette équation nous donne

$$(4)\qquad R.\sin\varphi_1 = \frac{eV}{2(V-v)}.$$

Substituant cette grandeur dans les équations (1) et (2), nous trouverons les coordonnées du point d'intersection

$$x_1 = \frac{1}{2}e\frac{V}{v},$$

$$y_1 = R\cos\varphi_1 = R\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi_1 - \frac{1}{8}\cdot\sin^4\varphi_1 - \ldots\right)$$
$$= R\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi_1\right) = R - \frac{1}{8R}\cdot\frac{e^2V^2}{(V-v)^2}.$$

La dernière équation nous donne

$$(5)\qquad pl = R - y_1 = \frac{1}{8R}\cdot\frac{e^2V^2}{(V-v)^2},$$

expression qui nous montre que la grandeur pl est d'autant plus petite que le rayon de la roue est plus grand et que la distance des

palettes est plus petite. En supposant la roue construite de manière que l'on ait

$$pl \leqq \Delta,$$

où $\Delta = \frac{Q}{bV}$ désigne la profondeur du courant dans le coursier, Q le volume d'eau dépensée en une seconde et b la largeur du coursier, nous trouverons pour la grandeur du plan

$$ApEl = 2\int_0^x (R - y).dx.$$

Substituant ici à x et y leurs valeurs tirées des équations (1) et (2), nous trouverons

$$\begin{aligned} ApEl &= 2R^2\left(\frac{V}{v} - 1\right)\int_0^{\varphi_1}(1 - \cos\varphi).\cos\varphi\, d\varphi \\ &= 2R^2\left(\frac{V}{v} - 1\right)\left(\sin\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\cdot\sin 2\varphi_1\right), \end{aligned}$$

ou approximativement

$$ApEl = R^2.\sin\varphi_1.(1 - \cos\varphi_1)\left(\frac{V}{v} - 1\right).$$

Substituant ici à $\sin\varphi_1$ et $\cos\varphi_1$ leurs valeurs tirées de l'équation (4), nous aurons

$$ApEl = \frac{1}{16}\cdot\frac{e^3V^3}{Rv(V-v)^2}.$$

En multipliant cette équation par $\frac{v}{e}$, nombre des palettes soumises à l'effet du courant pendant une seconde, et par la largeur l de la roue, nous trouverons le volume de l'eau coulant inutilement sous les palettes pendant une seconde; ce volume est donc

$$(6) \qquad Q_1 = \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2V^3}{R(V-v)^2}\cdot lV = \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2V^2}{R(V-v)^2}\cdot\frac{Q}{\Delta}.$$

Si la roue est construite de manière que

$$R - y_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{e^2V^2}{R(V-v)^2} = \Delta;$$

on aura, d'après l'équation (6),

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q,$$

c'est-à-dire que le volume de l'eau inactive sera égal à la moitié du volume total de l'eau dépensée.

L'équation (6) nous montre que la dépense d'eau étant constante, la perte de l'eau varie dans le même sens que la distance entre les palettes et en sens contraire du rayon de la roue et de la profondeur du courant. Elle montre surtout que plus la roue se meut lentement, plus la perte d'eau est faible, ce qui est une des conséquences les plus remarquables de cette formule. Elle nous explique pourquoi la vitesse de la roue en dessous à aubes planes était, dans certaines conditions, d'après l'expérience, moindre que la moitié de la vitesse du courant.

Soit n_1 le nombre des distances e entre les palettes dont les bords se trouvent en même temps sous le niveau du courant, nous aurons

$$n_1 e = 2\,AA_1.$$

Mais en prenant approximativement la corde pour l'arc

$$(AA_1)^2 = 2R\Delta.$$

Donc

$$n_1^2 . e^2 = 8R\Delta,$$

par conséquent,

$$e^2 = \frac{8R\Delta}{n_1^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression (5), nous trouvons

$$R - y_1 = \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{V^2}{(V - v)^2} \cdot \Delta.$$

Cela nous montre que pour que $R - y_1$ soit $\leqq \Delta$, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{V^2}{(V - v)^2} \leqq 1$$

ou

$$n_1 \geqq \frac{V}{V - v}.$$

En prenant approximativement $v = \frac{1}{2}V$, nous trouvons que pour que $R - y_1$ soit moindre que Δ, il est nécessaire que trois palettes au moins soient simultanément plongées dans le courant : c'est la règle de l'abbé Bossut, dont nous avons parlé au commencement de cette Note.

Certains hydrauliciens ont proposé de construire un ressaut derrière la roue et d'abaisser le niveau du courant dans le bief d'aval jusqu'au fond du coursier. Alors les seules molécules liquides qui choqueront la palette sont celles qui l'atteindront pendant son mouvement descendant jusqu'à sa position verticale, et il n'est pas difficile de trouver de la même manière que précédemment que le volume de l'eau inutilement dépensée chaque seconde sera

$$Q_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2 V^2}{R(V - v)^2} \cdot lV = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2 V^2}{R(V - v)^2} \cdot \frac{Q}{\Delta}.$$

En comparant cette expression avec l'expression (6), nous voyons que dans ce cas la quantité de l'eau inutilement dépensée est quatre fois plus grande que quand le coursier est rectiligne.

Enfin quand la roue est emboîtée dans un coursier circulaire, régulièrement construit, on a

$$Q_1 = 0.$$

L'autre perte d'eau provient de ce qu'il y a toujours du jeu entre les bords des palettes et le coursier. Si nous désignons la hauteur du jeu par ε_1, le volume de l'eau perdue sera

$$(7) \qquad Q_2 = l\varepsilon_1 V = \varepsilon_1 \cdot \frac{Q}{\Delta}.$$

Mais le jeu peut exister aussi entre les côtés des palettes et le coursier; désignant ce jeu par ε_2, nous trouverons pour le volume de l'eau perdue

$$(8) \qquad Q_3 = 2\varepsilon_2 . \Delta . V = \frac{2\varepsilon_2}{l} \cdot Q.$$

Ainsi la roue ne sera soumise qu'à l'action du volume

$$Q - Q_1 - Q_2 - Q_3.$$

Nous désignerons ce volume par Q'.

3. Soit δ l'angle formé par la direction de la vitesse V de l'eau du courant avec la tangente à la circonférence de la roue; la perte du travail par le choc de l'eau du courant sur les palettes sera exprimée par

$$\frac{\Pi Q'}{2g}(V^2 - 2Vv\cos\delta + v^2),$$

où Π est la pesanteur spécifique de l'eau. Pour le filet moyen du courant

$$\frac{\Delta}{2} = R(1 - \cos\delta), \quad \cos\delta = 1 - \frac{\Delta}{2R},$$

et la perte du travail par le choc peut être exprimée par

$$\frac{\Pi Q'}{2g}\left[(V - v)^2 + \frac{Vv\Delta}{R}\right].$$

4. Cherchons maintenant la vitesse du courant d'aval dans le voisinage de la roue. Si le canal d'aval est construit régulièrement, il faut faire attention à deux circonstances : à l'existence ou la non-existence du ressaut, sous la roue, et à la position des palettes, qui peuvent être dirigées selon le rayon de la roue ou être un peu inclinées vers le courant. Nous considérons premièrement le coursier rectiligne, sans ressaut.

En inclinant les palettes vers le courant, on a le soin de les disposer de telle manière qu'elles sortent du courant presque verticales. D'après cette construction des palettes, le courant de l'eau qui a perdu sa vitesse relative, et le bord de la palette sortant du courant, auront tous les deux un mouvement horizontal, et l'eau abandonnera la roue avec une vitesse à peu près horizontale et égale à la vitesse des bords des palettes. Mais le fait se passe d'autre manière, si les palettes sont disposées dans la direction du rayon. En se mouvant avec la roue, les palettes donnent aussi le mouvement circulaire à l'eau, et l'augmentation de la vitesse du courant d'aval pendant ce mouvement est d'autant plus grande que la vitesse de la roue est plus considérable et que le rayon de la roue est plus petit. Supposons les palettes dirigées suivant le rayon, et prenons une molécule liquide à la distance r_0 de l'axe de la roue au moment où la palette a pris la position ver-

ticale. Soit au bout du temps t la molécule dont il s'agit obéissant à l'action de la gravité et de la force centrifuge, elle s'est transportée à la distance r de l'axe de la roue. En désignant par ω la vitesse angulaire de la roue, nous trouverons

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r + g \cdot \cos(\omega t).$$

L'intégration de cette équation nous donne

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t) + C_1 e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{-\omega t}.$$

En rapportant r et $\frac{dr}{dt}$ à l'origine du temps t, pour lequel nous avons $r = r_0$ et $\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$, nous trouvons deux équations qui nous donnent

$$C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2} + \frac{g}{4\omega^2},$$

et, par conséquent,

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{g}{2\omega^2}\right)(e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

L'angle ωt est petit, et, en se bornant aux termes du second ordre, l'équation ci-dessus peut être présentée plus simplement sous la forme suivante :

$$(10) \qquad r = r_0 + \frac{t^2}{2}(g + r_0 \cdot \omega^2).$$

En désignant par T le temps écoulé depuis le commencement du mouvement jusqu'au moment où la molécule abandonne la roue, en atteignant sa circonférence extérieure, nous tirons de l'équation précédente

$$T^2 = \frac{2(R - r_0)}{g + r_0\omega^2}.$$

De l'équation (10) nous tirons pour la vitesse du mouvement relatif suivant la direction du rayon

$$\frac{dr}{dt} = t(g + r_0\omega^2).$$

Pour le moment où la molécule abandonne la roue, cette vitesse devient

$$u_r^2 = T(g + r_0\omega^2),$$

ou, en éliminant T,

$$u_r^2 = 2(R - r_0)(g + r_0\omega^2).$$

Puisque la direction de la vitesse relative u_r et de la vitesse de la roue v sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a pour le carré de la vitesse absolue u_a, avec laquelle l'eau abandonne la roue :

$$u_a^2 = u_r^2 + v^2 = 2(R - r_0)(g + r_0\omega^2) + v^2.$$

Quand le fond du coursier est horizontal, soit W le point où la molécule liquide abandonne la palette. En prenant approximativement la corde AW égale à l'arc $AW = vT$ et menant la ligne WO perpendiculaire à CA, nous avons

$$AO = \frac{(AW^2)}{2R} = \frac{v^2T^2}{2R}.$$

Et puisque au commencement du temps t la molécule liquide dont il s'agit se trouve à la hauteur $R - r_0$ au dessus du fond du coursier, la molécule s'élève pendant le temps T de la hauteur

$$AO - (R - r_0) = \frac{v^2T^2}{2R} - (R - r_0).$$

En outre, puisque la molécule dont il s'agit possède en abandonnant la roue une vitesse horizontale u_a, le carré de la vitesse u, avec laquelle l'eau s'éloignera de la roue, sera égale à

$$\begin{aligned} u^2 &= u_a^2 + 2g\cdot\frac{v^2T^2}{2R} - 2g(R - r_0) \\ &= u^2\left\{1 + 2(R - r_0)\left(\frac{r_0}{R^2} + \frac{R_g}{gR^2 + r_0v^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

expression dans laquelle nous avons remplacé ωR par v.

Le courant, après avoir choqué la palette, perd sa vitesse relative, se nivelle entre les palettes en prenant la vitesse v; par conséquent, la

profondeur correspondante est égale à $\frac{Q}{lv}$. Pour étendre le résultat précédent relatif à une seule molécule à toutes les molécules du courant, considérons le filet moyen pour lequel, comme nous avons remarqué plus haut, on a

$$R - r_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{lv},$$

d'où

$$r_0 = R - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{lv}.$$

Après avoir substitué cette grandeur de r_0 dans l'expression précédente, nous trouverons

$$u^2 = v^2 \left\{ 1 + \frac{Q}{lv} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R\left(1 + \frac{v^2}{gR}\right)} \right] \right\},$$

où nous avons négligé $\frac{1}{2}\frac{Q}{lv}$ devant R. Puisque $\frac{v^2}{gR}$ est toujours une grandeur très-petite devant l'unité, nous pouvons mettre la formule précédente sous la forme

$$u^2 = v^2 \left[1 + \frac{Q}{lv.R} \left(2 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots \right) \right]. \tag{11}$$

Dans le cas où R sera assez grand, nous pourrons négliger les membres $\frac{v^2}{gR}$, $\frac{v^4}{g^2R^2}$, etc., et prendre

$$u^2 = v^2 + \frac{2Qv}{lR}.$$

Quand les palettes sont inclinées de manière à être presque verticales en sortant de l'eau, on peut, dans les formules précédentes, faire $R = \frac{v}{\omega} = \infty$ et prendre $u = v$. S'il se trouve sous la roue un ressaut tel, que le niveau du courant d'aval soit à la hauteur du fond du coursier, il faudra ajouter à la deuxième partie de l'équation précédente le membre $2g\Delta \frac{V}{v}$.

5. Au nombre des pertes de travail, il faut compter celle qui est occasionnée par la résistance de l'air au mouvement. La théorie, d'accord avec l'expérience, montre que la résistance de l'air au mouvement d'un plan perpendiculaire à la direction du courant d'air s'exprime par

$$\frac{\Pi_1}{2g}\cdot S v^2,$$

où Π_1 est le poids spécifique de l'air, S la grandeur du plan, dont la vitesse est v. L'expérience montre seulement qu'il faut multiplier l'équation précédente par un coefficient dont la grandeur se change selon les circonstances. Pour le cas dont il s'agit, nous pouvons prendre ce coefficient égal à 1,43 d'après les expériences de M. Borda et Thibaut. Si l'on appelle a la grandeur de l'aube dans le sens du rayon, on a

$$S = al.$$

Le nombre des palettes est $2\pi\frac{R}{e}$: par conséquent, la valeur de la résistance totale de l'air au mouvement des palettes est

$$4,49\cdot\frac{\Pi_1}{g}\cdot\frac{Ralv^2}{e},$$

et son travail par seconde a pour valeur

$$4,49\cdot\frac{\Pi_1}{g}\cdot\frac{Ralv^3}{e}.$$

Enfin le frottement des tourillons de l'arbre sur les coussinets qui les supportent produit une perte de travail qui a pour valeur

$$fG\cdot\frac{\rho}{R}v,$$

en désignant par ρ le rayon du tourillon, par G le poids de la roue et par f le coefficient de frottement.

6. Par ce qui précède, on voit combien de différentes circonstances il faut prendre en considération pour déterminer le travail utile de la

roue en dessous à aubes planes. C'est pourquoi nous nous bornerons à la théorie de la roue hydraulique à coursier rectiligne presque horizontal et à aubes dirigées suivant les rayons de la roue. Nous avons dit que le volume d'eau qui agit sur la roue pendant une seconde, est, d'après les formules (6), (7) et (8),

$$Q' = Q - Q_1 - Q_2 - Q_3 = \left[1 - \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2 V^2}{R\Delta(V-v)^2} - \frac{\varepsilon_1}{\Delta} - \frac{2\varepsilon_2}{l}\right] Q;$$

et le travail correspondant dû à la force vive de cette masse liquide est

$$\frac{\Pi Q'}{2g_1}\cdot V^2.$$

Le courant d'eau, après avoir choqué les palettes et perdu sa vitesse relative, a éprouvé une perte de force vive égale à

$$\frac{\Pi Q'}{2g}\left[(V-v)^2 + \frac{Vv\Delta}{R}\right].$$

Après avoir perdu sa vitesse relative, le courant se nivelle entre les palettes et prend une profondeur égale $\Delta\frac{V}{v}$; le niveau du courant s'élève de la hauteur

$$\Delta\left(1 - \frac{V}{v}\right),$$

et le travail perdu de cette manière est approximativement

$$\Pi Q'.\Delta\left(1 - \frac{V}{v}\right).$$

Le courant en s'éloignant de la roue emporte avec lui une force vive égale à

$$\Pi Q'\cdot\frac{u^2}{2g},$$

u^2 étant exprimé par la formule (11).

En résumant tout cela et ajoutant les pertes du travail par la résistance de l'air et par le frottement, nous trouverons le travail utile

de la roue

$$(12)\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{T}_u = \frac{\Pi Q}{2g}\left[1 - \frac{1}{16}\cdot\frac{e^2V^2}{R\Delta(V-v)^2} - \frac{\varepsilon_1}{\Delta} - \frac{2\varepsilon_2}{l}\right]\\&\quad\times\left[2(V-v)v - \frac{Vv\Delta}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) - 2g\Delta\frac{V-v}{v}\right]\\&\quad - 4{,}49\frac{\Pi_1}{g}\frac{Ralv^3}{e} - fG\frac{\rho}{R}v.\end{aligned}\right.$$

7. La formule précédente donne l'expression du travail réellement rendu par la roue; en supprimant les deux derniers termes qui sont relatifs à la résistance de l'air et au frottement du tourillon sur les coussinets, le second membre de l'équation représenterait le travail rendu par l'eau. Nous distinguerons ces deux espèces de travaux en donnant au premier le nom de *travail utile disponible* et au second le nom de *travail utile total*. Smeaton considère ce dernier travail pour déterminer la vitesse la plus avantageuse de la roue et le rendement correspondant.

Considérons le travail utile total d'une roue déjà construite. En négligeant les termes

$$\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{e^2V^2}{R\Delta(V-v)^2} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta} + \frac{2\varepsilon_2}{l}\right]$$
$$\times\left[\frac{Vv\Delta}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + 2g\Delta\frac{V-v}{v}\right],$$

qui n'ont pas grande influence sur les lois du changement de la vitesse la plus avantageuse, nous trouverons

$$(13)\qquad \mathfrak{T}_u = \frac{\Pi Q}{2g}\left\{\begin{aligned}&2\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\Delta} - \frac{2\varepsilon_2}{l}\right)(V-v)v - \frac{1}{8}\frac{e^2V^2v}{R\Delta(V-v)}\\&-\frac{Vv\Delta}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) - 2g\Delta\frac{V-v}{v}\end{aligned}\right\}.$$

Pour déterminer la vitesse la plus avantageuse, nous avons la condition

$$\frac{d\mathfrak{T}_u}{dv} = 0;$$

de cette équation, nous déduisons

$$(14)\quad v = \frac{V}{2}\left\{\begin{matrix} 1 - \dfrac{\Delta}{1 - \dfrac{\varepsilon_1}{\Delta} - \dfrac{2\varepsilon_2}{l}} \\ \times\left[\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{e^2V^2}{R(V-v_{,})^2\Delta^2} + \dfrac{1}{2R}\left(3 - \dfrac{3v^2}{gR} - \dfrac{5v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) - \dfrac{g}{v^2}\right]\end{matrix}\right\}.$$

Si pour première approximation nous prenons $v = \frac{V}{2}$, il viendra

$$(15)\quad v = \frac{V}{2}\left\{\begin{matrix} 1 - \dfrac{\Delta}{1 - \dfrac{\varepsilon_1}{\Delta} - \dfrac{2\varepsilon_2}{l}} \\ \times\left[\dfrac{e^2}{4R\Delta^2} + \dfrac{1}{2R}\left(3 - \dfrac{3}{4}\dfrac{V^2}{gR} - \dfrac{5V^4}{16g^2R^2} - \ldots\right) - \dfrac{4g}{V^2}\right]\end{matrix}\right\}.$$

La vitesse la plus avantageuse peut être inférieure, égale et même supérieure à la moitié de la vitesse du courant suivant que l'expression ci-dessus, comprise entre crochets [ ], est positive, nulle ou négative. On voit que si la vitesse V du courant devient de plus en plus petite, l'expression [ ] va en diminuant : les termes

$$\frac{1}{2R}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{V^2}{gR} + \frac{5}{6}\cdot\frac{V^4}{g^2R^2} + \ldots\right)$$

sont plus petits que le terme

$$\frac{4g}{V^2},$$

et l'accroissement de ce dernier est plus grand que la diminution des premiers termes pour une même diminution de la vitesse V. Quand on augmente la profondeur du courant, la vitesse de ce courant restant constante, le premier terme de l'expression [ ] deviendra de plus en plus petit et celle-ci va diminuer ; par conséquent, la vitesse la plus avantageuse de la roue va augmenter. Ainsi en diminuant la vitesse et augmentant la profondeur du courant, on peut faire en sorte que l'expression [ ] devienne négative, et alors la vitesse de la roue est plus grande que la moitié de la vitesse du courant. Cela est tout à fait d'accord avec les expériences de Smeaton, dont nous avons énoncé plus

haut les résultats. Cela explique comment les auteurs ont donné des nombres différents pour le rapport de la vitesse de la roue à la vitesse du courant. Des considérations analogues ressortent de l'expérience et de la théorie pour le travail du rapport utile de la roue au travail correspondant à la chute d'eau et à la dépense. Ce rapport est fonction de beaucoup de circonstances et n'est nullement constant.

Nous croyons d'autant plus inutile d'entrer dans une analyse plus détaillée, que les expériences qui ont été faites jusqu'ici sur les roues hydrauliques ne peuvent pas être regardées comme bien satisfaisantes.

8. Avant de passer à la détermination des dimensions à établir, nous ferons une remarque sur la théorie des machines en général. La théorie d'une machine ne peut être satisfaisante et utile que lorsqu'elle nous donne le travail utile en fonction de dimensions et de la marche de la machine. Soient a, b, c, etc., les dimensions de la machine et les vitesses de ses parties; le travail utile $\mathfrak{T}_u$ est de la forme

$$\mathfrak{T}_u = f(a, b, c, \ldots).$$

Pour déterminer ces dimensions et la marche la plus avantageuse de la machine, nous avons les équations

$$\frac{d\mathfrak{T}_u}{da} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}_u}{db} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{T}_u}{dc} = 0, \ldots,$$

qui font connaître a, b, c, etc. Quelques-unes de ces dimensions peuvent être données d'avance; on doit alors prendre parmi les équations ci-dessus seulement celles qui correspondent aux dimensions indéterminées. Quelquefois ces équations peuvent conduire à des dimensions exagérées, ou tout au moins produisant des difficultés de construction qui ne seraient pas suffisamment compensées par l'amélioration de rendement. Ces grandeurs nous montrent seulement les limites qui ne doivent pas être dépassées. Il faut alors choisir les dimensions d'après les considérations particulières et les faire entrer dans la question comme des données.

Cette dernière remarque nous était indispensable. Le travail perdu

par le frottement des tourillons de l'arbre sur les supports est égal à

$$f\,G\,\frac{\rho}{R}\cdot v.$$

Le poids G de la roue peut être exprimé par la formule

$$a + bR,$$

où a et b sont des coefficients numériques; le rayon du tourillon de l'arbre se détermine habituellement par la formule

$$\rho = f'\sqrt{G} = f'\sqrt{a + bR},$$

dans laquelle f' est un coefficient numérique. Ainsi le travail du frottement s'exprime par

$$\frac{ff'(a + bR)^{\frac{3}{2}}}{R}\cdot v.$$

En introduisant cette expression dans notre formule du travail utile disponible (12), nous pourrions déterminer la grandeur du rayon de la roue : une grande valeur du rayon de la roue a l'avantage de diminuer le volume de l'eau qui passe inactive entre les palettes, mais en même temps elle a l'inconvénient d'augmenter la perte du travail par les frottements. Mais nos formules peuvent nous conduire à une valeur exagérée du rayon; il faut donc se laisser guider par des considérations particulières, telles que le prix de la construction de la roue, les limites imposées par la disposition des lieux, la nature du mécanisme qui doit fonctionner par le moyen de la roue, etc. Quelquefois on détermine le rayon en se donnant d'avance le nombre n de tours que la roue doit faire par minute. On a alors

$$n\,.\,2\pi R = 60\,.\,v,$$

d'où

$$R = 9{,}55\cdot\frac{v}{n}.$$

Comme on sait que dans les roues bien construites v est presque égal à

$\frac{V}{2}$, la formule ci-dessus peut faire connaître approximativement la grandeur du rayon.

Après avoir choisi le rayon de la roue et la distance e entre les palettes, il nous reste les deux équations

$$\frac{d\mathcal{T}_u}{dv} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{T}_u}{d\Delta} = 0$$

pour déterminer la vitesse de la roue et la profondeur du courant les plus avantageux. $\mathcal{T}_u$ étant le travail utile total, les équations ci-dessus nous donnent la relation (14), ou, pour première approximation (15) et relation

$$\Delta^2 = \frac{2\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{e^2 V^2}{R(V-v)^2} + \varepsilon_1\right](V-v)v}{\frac{Vv}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \ldots\right) + 2g\frac{V-v}{v}},$$

ou approximativement

$$\Delta^2 = \frac{\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{e^2}{R^2} + \varepsilon_1\right)V^2}{\frac{V^2}{R}\left(3 - \frac{V^2}{4gR} - \ldots\right) + 4g},$$

si pour première approximation nous prenons $v = \frac{V}{2}$. Nos formules donnent des valeurs suffisamment approchées, et l'on peut se dispenser de pousser les calculs plus loin. La largeur de la roue se déterminera par l'équation

$$l = \frac{Q}{V\Delta}.$$

9. Nous avons déjà vu que les expériences de Bossut amenèrent à construire les roues hydrauliques en dessous à aubes planes avec un grand nombre de palettes; mais déjà Smeaton, qui a fait pour son temps les meilleures études sur les roues hydrauliques, a remarqué que le nombre des palettes n'aura pas grand effet sur le travail utile de la roue dont il s'agit, si l'on construit un coursier concentrique à à la roue et l'embrassant sur une certaine étendue. Si en un certain point le bord de la palette touche le fond du coursier, la molécule

liquide la plus éloignée qui s'écoulera entre les palettes sans les toucher se trouve, comme nous l'avons déjà vu, à la distance $e\frac{V}{v}$ du point ci-dessus. En désignant par L la longueur de la partie circulaire du coursier, nous voyons que, pour que la molécule atteigne la palette, il faut nécessairement que L soit déterminé par la condition

$$\frac{e\frac{V}{v}+L}{S}=\frac{V}{v},$$

car en même temps que le bord de la palette décrira l'arc L avec la vitesse v, la molécule pour venir choquer la palette doit nécessairement passer l'étendue $e\frac{V}{v}+L$ avec la vitesse V. Par conséquent

$$L=e\frac{V}{V-v}.$$

Si nous posons $V=\frac{V}{2}$, il vient

$$L=2e,$$

c'est-à-dire que le coursier circulaire doit embrasser la roue au moins sur l'étendue de deux distances e. C'est tout à fait d'accord avec les regles pratiques de la construction du coursier circulaire des roues en dessous à aubes planes. Mais nous voyons immédiatement que la vitesse la plus avantageuse de la roue dont nous parlons est toujours plus grande que la moitié de la vitesse V; par conséquent, il faut toujours donner au coursier une longueur plus grande que $2e$.

Pour la roue en dessous à aubes planes à coursier circulaire, le travail utile total devient

$$\mathcal{E}_u=\frac{\Pi Q}{g}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\Delta}-\frac{2\varepsilon_2}{e}\right)$$
$$\times\left[(V-v)v-\frac{Vv\Delta}{2R}\left(3-\frac{v^2}{gR}-\frac{v^4}{g^2R^2}-\ldots\right)-g\Delta\frac{V-v}{v}\right].$$

La roue étant supposée construite, la vitesse la plus avantageuse est

donnée par la formule

$$v = \frac{V}{2}\left[1 - \frac{\Delta}{4R}\left(3 - \frac{3v^2}{gR} - \frac{5v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + \frac{g\Delta}{v^2}\right]$$

ou, pour première approximation,

$$v = \frac{V}{2}\left[1 - \frac{\Delta}{4R}\left(3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{V^2}{gR} - \frac{5}{16}\cdot\frac{V^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + \frac{4g\Delta}{V^2}\right].$$

L'expression entre parenthèses est toujours plus grande que l'unité, par conséquent v est toujours plus grand que $\frac{V}{2}$.

Pour déterminer ces dimensions et la marche de la même roue, nous avons pour v la relation précédente et pour Δ la relation

$$\Delta^2 = \frac{2\varepsilon_1(V - v)}{\frac{Vv}{R}\left(3 - \frac{v^2}{gR} - \frac{v^4}{g^2R^2} - \ldots\right) + 2g\frac{V - v}{v}}$$

ou, pour première approximation,

$$\Delta^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_1 V^2}{\frac{V^2}{R}\left(3 - \frac{V^2}{4gR} - \frac{V^4}{16g^2R^2} - \ldots\right) + 4g}.$$

Cette valeur de Δ ne doit être regardée que comme une limite qu'il ne faut pas dépasser.

AUTRE ÉGALITÉ D'INTÉGRALES DOUBLES;

PAR M. BESGE.

Il y a une certaine liaison entre le théorème que je veux donner aujourd'hui et celui que j'ai donné dans le cahier de *septembre*. Il s'agit encore d'une égalité entre deux intégrales définies doubles, où les limites pour les deux variables x et y sont 0 et 1.

Les deux intégrales dont il s'agit cette fois sont

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\varphi, \psi)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}}$$

et

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\psi, \varphi)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}};$$

on suppose

$$\varphi = \frac{\sqrt{xy(1-y)}}{1+\sqrt{1+ax}}, \quad \psi = \frac{\sqrt{y(1-y)(1-x)}}{(1+\sqrt{1+ax})\sqrt{1+ay}};$$

a étant une constante; et notre théorème consiste en ce que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\varphi, \psi)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\psi, \varphi)\, dx\, dy}{x(1-x)\sqrt{y(1-y)}},$$

en sorte que l'on peut permuter φ et ψ sous le double signe intégral.

Ici, encore, la démonstration résultera, si on le veut, du développement de $f(\varphi, \psi)$ et de $f(\psi, \varphi)$ en séries ordonnées suivant les puissances des deux quantités φ et ψ.

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx + (A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)\,dy = 0;$$

PAR M. E.-G. BJÖRLING.

LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE STOCKHOLM LE 12 FÉVRIER 1855.

Deux espèces particulières de l'équation différentielle

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx \\ &+ (A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)\,dy = 0, \end{aligned}\right.$$

l'une pourtant renfermant l'autre, ont déjà été traitées par Euler et par Jacobi, mais sans égard à leur propriété d'être des cas particuliers de l'équation (1).

Euler, dans ses *Institutiones Calculi integralis* [*], en considérant l'équation

$$(2)\qquad y\,dy + dy\,(a + bx + nx^2) = y\,dx\,(c + nx)\ [^{**}],$$

a trouvé, par une divination heureuse, que les variables y peuvent être séparées à l'aide de la substitution

$$u = \frac{y\,(c + nx)}{y + a + bx + nx^2};$$

mais il ajoute aussi à la fin cet aveu : *Casu autem hic vix prævi-*

[*] Tome I, *Petropol.*, 1792, page 269 (probl. 55).

[**] Ou, ramenée à la forme (1) :

$$(\alpha)\qquad (nxy + cy)\,dx - (nx^2 + bx + y + a)\,dy = 0.$$

dendo evenit, ut hæc substitutio ad votum successerit, neque hoc problema magnopere juvabit.

D'un autre côté, Jacobi, en traitant [*] l'équation un peu plus générale

$$(3)\quad \begin{cases} (A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy \\ \qquad + (C + C'x + C''y)dx = 0\,[^{**}], \end{cases}$$

parvient par une méthode, comme il s'exprime : *ab Euleriana toto cœlo diversa*, à en trouver l'intégrale. Cependant cette méthode, quelque ingénieuse qu'elle soit, laisse à part, elle aussi, tout égard à la propriété de l'équation (3) d'être un cas particulier de l'équation générale (1); de sorte qu'à la rigueur le résultat obtenu par Jacobi, quoiqu'un peu plus général que celui d'Euler déjà mentionné, exige pourtant encore lui-même l'aveu dont Euler (*voyez* la citation plus haut) se croyait obligé d'accompagner le sien.

C'est précisément cette omission du caractère de l'équation *jacobique* d'être un cas particulier de l'équation (1) qui a donné lieu au présent Mémoire. Non pas que nous nous proposions d'intégrer ici d'abord l'équation générale (1), pour en déduire ensuite l'intégrale de l'espèce *jacobique* (3). En effet, on sait bien que l'équation *complète* (1) n'est pas intégrable dans le sens ordinaire [***]; mais en observant que

[*] *Journal de Crelle*, tome XXIV (1842).

[**] Ou bien, ramenée à la forme (1) :

$$\begin{aligned} &[A'xy + A''y^2 - C'x + (A - C'')y - C]\,dx \\ &- [A'x^2 + A''xy + (A - B')x - B''y - B]\,dy = 0, \end{aligned}$$

ou, plus brièvement,

$$(\beta)\quad (axy + by^2 + cx + dy + e)\,dx - (ax^2 + bxy + c'x + d'y + e')\,dy = 0,$$

d'où en effet on voit bien que l'equation d'Euler (2), ou (α), se trouve renfermée, comme un cas particulier, dans celle de Jacobi (3).

[***] A cet égard il suffira de se rappeler qu'en effet l'équation

$$(\gamma)\qquad (Ax^2 + Cy^2)\,dx + F_1\,dy = 0$$

se trouve, elle-même déjà, parmi celles de *Riccati* que l'on ne sait pas intégrer à l'ordinaire.

(comme on le sait aussi) l'intégrale de l'équation complete

$$(4)\qquad (Ax + By + C)dx + (A_1x + B_1y + C_1)dy = 0,$$

comprise elle-même parmi les espèces de l'équation (1), peut être obtenue d'une manière très-simple et directe, pourvu que l'on ait d'abord intégré l'équation (sans termes C et C_1)

$$(4')\qquad (Ax + By)dx + (A_1x + B_1y)dy = 0,$$

il m'a paru tout naturel d'essayer au moins si l'on ne réussirait pas aussi à trouver, par une méthode tout à fait analogue [*], l'intégrale de l'epèce *jacobique*. *Qu'en effet cet essai vienne d'être couronné d'un succès parfait*, c'est ce qui se fera voir dans les pages suivantes, lesquelles au reste donneront peut-être lieu quelquefois de faire discuter plus en détail la question de l'intégration de l'équation plus générale (sans termes F et F_1)

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey)dx \\ &+ (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y)dy = 0. \end{aligned}\right.$$

Effectivement il était naturel, en m'étant proposé d'essayer de faire dériver l'intégrale de l'équation *jacobique* de l'intégration d'une pareille équation *sans* termes F et F_1, de considérer d'abord l'équation générale (5), pour passer ensuite à l'espèce de celle-ci, représentée par l'équation de Jacobi *sans* les termes nommés. A la vérité, je reconnus bientôt que l'intégration de l'équation (5) dans sa généralité est au moins assujettie à des difficultés assez grandes pour ne pas admettre ici la discussion en détail; mais en même temps je constatai qu'outre l'espèce particulière de l'équation (5) dont il vient d'être question, et qui se rapporte à celle de Jacobi de même que l'équation (4′) se rapporte à la complète (4), il existe d'autres espèces très-remarquables de cette même équation dont les intégrales se présentent

[*] Cette idee m'a eté premièrement suggérée par mon ami M. Lindman, à Strengnas, lorsque, il y a quelque temps, il m'adressa la question si jamais j'avais vu faire l'essai d'intégrer l'équation (1) en général, et en me rappelant en même temps le caractère de l'equation de Jacobi de n'en être effectivement qu'une espèce particulière.

aussi spontanément que celle de l'espèce nommée. Faire remarquer toutes ensemble ces espèces de l'équation (5), parvenir par l'intégration de cette dernière à l'intégrale de l'équation *jacobique* complète (3), de même que l'on fait dériver l'intégrale de l'équation complète (4) de l'intégration de l'équation (4'), et enfin ajouter quelques mots des espèces de l'équation complète (1) qui se rapportent aux autres espèces qu'on vient de nommer de l'équation (5), voilà donc le sujet du présent Mémoire.

§ I.

1. Pour frayer le chemin aux recherches suivantes, considérons d'abord l'équation

$$(4') \qquad (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)dx + (\mathrm{A}_1 x + \mathrm{B}_1 y)dy = 0.$$

Comme à la place de celle-ci on peut écrire

$$\left[\mathrm{A}\left(\frac{x}{y}\right) + \mathrm{B}\right]dx + \left[\mathrm{A}_1\left(\frac{x}{y}\right) + \mathrm{B}_1\right]dy = 0,$$

ou, en mettant z au lieu de $\frac{x}{y}$,

$$(6) \qquad [\mathrm{A}z^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{A}_1)z + \mathrm{B}_1]dy + y(\mathrm{A}z + \mathrm{B})dz = 0$$

ce qui, si l'on excepte seulement le cas particulier

$$(7) \qquad 0 = \mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1,$$

revient à l'équation suivante :

$$dy + y \cdot \frac{(\mathrm{A}z + \mathrm{B})dz}{\mathrm{A}z^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{A}_1)z + \mathrm{B}_1} = 0,$$

ou bien enfin à celle-ci :

$$\frac{d\left[ye^{\int_0^z \frac{(\mathrm{A}z + \mathrm{B})dz}{\mathrm{A}z^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{A}_1)z + \mathrm{B}_1}}\right]}{ye^{\int_0^z \frac{(\mathrm{A}z + \mathrm{B})dz}{\mathrm{A}z^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{A}_1)z + \mathrm{B}_1}}} = 0;$$

il s'ensuit qu'au moins en exceptant le cas particulier (7), l'intégrale générale de l'équation (4′) sera

$$(8) \qquad y e^{\int_0^z \frac{(Az+B)dz}{Az^2+(B+A_1)z+B_1}} = \text{const.},$$

pourvu qu'après avoir éliminé le signe d'intégrale, l'on ait soin de remplacer z par $\frac{x}{y}$.

Dans le cas particulier (7) l'intégrale est bien évidemment

$$z = \frac{x}{y} = \text{const.}$$

2. Cela étant, comme évidemment l'équation complète

$$(4) \qquad (Ax + By + C)dx + (A_1 x + B_1 y + C_1)dy = 0$$

(à savoir, C et C_1 n'étant pas $= 0$ à la fois) peut être ramenée, en posant

$$(9) \qquad x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

à la forme (4′), savoir, à

$$(A\xi + B\eta)d\xi + (A_1\xi + B_1\eta)d\eta = 0,$$

toutes les fois qu'il existe des constantes finies α et β qui remplissent les conditions

$$(10) \qquad \begin{cases} A\alpha + B\beta + C = 0, \\ A_1\alpha + B_1\beta + C_1 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire au moins toutes les fois que l'on n'a pas

$$(11) \qquad AB_1 - A_1B = 0,$$

il s'ensuit, en vertu de l'article précédent **1**, que l'intégrale générale de l'équation (4) sera :

1°. Dans le cas particulier (7)

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{x-\alpha}{y-\beta} = \text{const.};$$

2°. Dans tout autre cas

$$(y-\beta)\,e^{\int_0^{\xi} \frac{(A\xi + B)\,d\xi}{A\xi^2 + (B + A_1)\xi + B_1}} = \text{const.}$$

$\Bigl($pourvu qu'apres l'intégration indiquée l'on ait soin de remplacer ξ par $\frac{\xi}{\eta}\Bigr)$, au moins si l'on excepte le seul cas (11). Et à l'égard de ce dernier il suffit de remarquer que, si l'un au moins des quatre coefficients A, B, A_1, B_1 n'est pas $=0$, il sera toujours aisé, comme on le sait bien, de séparer immédiatement et sans emploi des formules (9) les variables dans l'équation (4) elle-même [*]; et que, du reste, si tous les quatre coefficients sont o à la fois, alors aussi les variables par cela même sont déjà séparées.

§ II.

Passons maintenant à l'équation (5), savoir,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey)\,dx \\ &\qquad + (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y)\,dy = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(Ax^2 + Bxy + Cy^2)\,dx + (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2)\,dy \\ &\qquad + (Dx + Ey)\,dx + (D_1x + E_1y)\,dy = 0 \end{aligned} \right.$$

---

[*] Par exemple, lorsque A n'est pas $=0$, on pourra mettre, au lieu de (11), $B_1 = \frac{A_1}{A}B$, et, par suite

1°. B n'étant pas non plus $=0$,

$$\frac{B_1}{B} = \frac{A_1}{A} = k,$$

et l'équation (4) se réduira à

$$(Ax + By)(dx + k\,dy) + C\,dx + C_1\,dy = 0.$$

Comme à la place de celle-ci on peut écrire

$$y\left\{\left[A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C\right]dx+\left[A_1\left(\frac{x}{y}\right)^2+B_1\left(\frac{x}{y}\right)+C_1\right]dy\right\}$$
$$+\left[D\left(\frac{x}{y}\right)+E\right]dx+\left[D_1\left(\frac{x}{y}\right)+E_1\right]dy=0,$$

ou, en mettant z au lieu de $\frac{x}{y}$,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &y\left\{[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\frac{dy}{y}+(Az^2+Bz+C)dz\right\}\\ &\quad+[Dz^2+(E+D_1)z+E_1]\frac{dy}{y}+(Dz+E)dz=0;\end{aligned}\right.$$

et qu'à la place de cette dernière on peut prendre encore

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &y[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\left[\frac{dy}{y}+\frac{(Az^2+Bz+C)dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1}\right]\\ &\quad+[Dz^2+(E+D_1)z+E_1]\left[\frac{dy}{y}+\frac{(Dz+E)dz}{Dz^2+(E+D_1)z+E_1}\right]=0,\end{aligned}\right.$$

au moins si l'on excepte les cas où les coefficients de l'équation (5) remplissent les deux systemes de conditions

$$(15)\qquad 0=A=B+A_1=C+B_1=C_1,$$
$$(16)\qquad 0=D=E+D_1=E_1,$$

ou bien l'un ou l'autre, au moins, d'entre eux [*], il est bon de

---

ou bien, en posant $Ax+By=\xi$,

$$(\xi+C)d\xi+[AC_1-BC+(kA-B)\xi]dy=0,$$

dans laquelle les variables pourront aisement être séparees; et

2°. B étant $=0$, et par conséquent aussi $B_1=0$, l'équation (4) se réduit immédiatement à celle-ci :

$$(Ax+C)dx+(A_1x+C_1)dy=0.$$

[*] On conçoit bien que ces cas renferment non-seulement celui où les coefficients des x^2, xy, y^2 sont $=0$ tous ensemble [partant l'équation (4') deja traitee], mais encore celui même où les coefficients de x et de y sont $=0$ tous ensemble, c'est-à-dire, l'équation

$$(\delta)\qquad (Ax^2+Bxy+Cy^2)dx+(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2)dy=0.$$

considérer d'abord, l'un après l'autre, ces trois cas particuliers.

(a) *Si les deux systèmes de conditions* (15) *et* (16) *sont remplis à la fois* et que par suite l'équation primitive (5) ait la forme

$$(5') \qquad (Bxy + Cy^2 + Ey)\,dx - (Bx^2 + Cxy + Ex)\,dy = 0,$$

et l'équation (13) correspondante la forme

$$(13') \qquad [y(Bz + C) + E]\,dz = 0;$$

alors évidemment l'intégrale générale sera

$$(17') \qquad z = \frac{x}{y} = \text{const.}$$

(b) *Si le système de conditions* (16), *mais non pas le* (15), *est rempli*, et que par suite l'équation (5) ait la forme

$$(5'') \quad (Ax^2+Bxy+Cy^2+Ey)\,dx+(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2-Ex)\,dy=0,$$

alors, comme l'équation (13) se réduit à

$$y[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\left[\frac{dy}{y}+\frac{(Az^2+Bz+C)\,dz'}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1}\right] + E\,dz = 0,$$

ou bien, après division par $Az^3 + \ldots$, à

$$(13'') \quad dy + y\cdot\frac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1} = -\frac{E\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1},$$

il s'ensuit que l'intégrale générale sera

$$(17'') \quad y e^{\int_0^z \frac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+\ldots}} = \text{const.} - \int_0^z \frac{E e^{\int_0^z \frac{(Az^2+Bz+C)\,dz}{Az^3+(B+A_1)z^2+\ldots}}}{Az^3+(B+A_1)z^2+\ldots}\,dz;$$

et enfin, dans le cas contraire,

(c) *Si le système de conditions* (15), *mais non pas le* (16), *est*

rempli, et que par suite l'équation (5) ait la forme

$$(5''')\qquad \begin{aligned}&(Bxy + Cy^2 + Dx + Ey)\,dx\\ &- (Bx^2 + Cxy - D_1 x - E_1 y)\,dy = 0,\end{aligned} \quad [*]$$

comme alors l'équation (13) se réduit à

$$y(Bz + C)dz + [Dz^2 + (E + D_1)z + E_1]\left[\frac{dy}{y} + \frac{(Dz + E)\,dz}{Dz^2 + (E + D_1)z + E_1}\right] = 0,$$

ou bien, après division par $y[Dz^2 + (E + D_1)z + E_1]$, à

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{1}{y}\cdot\frac{(Dz + E)\,dz}{Dz^2 + (E + D_1)z + E_1} = -\frac{(Bz + C)\,dz}{Dz^2 + (E + D_1)z + E_1},$$

c'est-à-dire, à celle-ci :

$$(13''')\qquad d\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cdot\frac{(Dz + E)\,dz}{Dz^2 + \ldots} = \frac{(Bz + C)\,dz}{Dz^2 + \ldots},$$

il s'ensuit que l'intégrale générale sera

$$(17''')\qquad \frac{1}{y}e^{-\int_0^z \frac{(Dz+E)dz}{Dz^2+\ldots}} = \text{const.} + \int_0^z \frac{Bz + C}{Dz^2 + \ldots}\, e^{-\int_0^z \frac{(Dz+E)dz}{Dz^2+\ldots}}\, dz.$$

4. Considérons, en second lieu, le cas général où les systèmes (15) et (16) ne sont remplis, ni l'un ni l'autre, par les coefficients de l'équation (5). Alors, comme à l'équation (13) on peut toujours substituer l'équation (14), ou en posant, pour abréger,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}\varphi' &= \frac{Az^2 + Bz + C}{Az^3 + (B + A_1)z^2 + (C + B_1)z + C_1},\\ \psi' &= \frac{Dz + E}{Dz^2 + (E + D_1)z + E_1},\end{aligned}\right.$$

[*] Évidemment l'équation même de Jacobi (β), dans la Note sous l'Introduction, mais dépourvue des termes C et C_1.

celle-ci :

$$(19)\quad \begin{cases} y[Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1]\left(\dfrac{dy}{y}+\varphi' dz\right) \\ \qquad +[Dz^2+(E+D_1)z+E_1]\left(\dfrac{dy}{y}+\psi' dz\right)=0, \end{cases}$$

on en conclut immédiatement que *dans le cas particulier* où l'on aura

$$(20)\qquad \varphi'=\psi'=\frac{\varphi'+\psi'}{2},$$

ce qui arrive, lorsqu'on aura

$$(AD_1-A_1D)z^3+\begin{Bmatrix} BD_1-B_1D \\ +AE_1-A_1E\end{Bmatrix}z^2+\begin{Bmatrix} CD_1-C_1D \\ +BE_1-B_1E\end{Bmatrix}z+CE_1-C_1E=0,$$

et, par suite, dans le cas nouveau

(d) *Où les coefficients de l'équation* (5) *remplissent le système de conditions*

$$(21)\qquad 0=AD_1-A_1D=\begin{Bmatrix} BD_1-B_1D \\ +AE_1-A_1E\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} CD_1-C_1D \\ +BE_1-B_1E\end{Bmatrix}=CE_1-C_1E$$

[sans que ni (15) ni (16) ne soient remplis], l'équation dont il s'agit ici (19) se réduira à

$$(19')\qquad [y(Az^3+\ldots)+(Dz^2+\ldots)]\left(\frac{dy}{y}+\frac{\varphi'+\psi'}{2}dz\right)=0,$$

et, par suite, son intégrale générale à

$$(22)\qquad ye^{\int_0^z \frac{\varphi'+\psi'}{2}dz}=\text{const.}=ye^{\frac{\varphi+\psi}{2}}\ \text{(pour abréger)}.$$

Mais, *en général*, en posant, pour abréger,

$[A]$ au lieu de $Az^3+(B+A_1)z^2+(C+B_1)z+C_1$,

$[D]$ . . . . $Dz^2+(E+D_1)z+E_1$,

u^2 . . . . y $\left(\text{d'où } \dfrac{dy}{y}=2\dfrac{du}{u}\right)$,

on en réduit l'équation (19) à

$$u^2[A]\left(\frac{du}{u}+\frac{\varphi'}{2}dz\right)+[D]\left(\frac{du}{u}+\frac{\psi'}{2}dz\right)=0,$$

ou, en divisant par u,

$$[A]\left(du+u\frac{\varphi'}{2}dz\right)-[D]\left[d\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{u}\frac{\psi'}{2}dz\right]=0,$$

et, par suite, si l'on désigne le rapport $\frac{[D]}{[A]}$ par Z^2, à celle-ci :

$$(23)\qquad \frac{1}{Z}\left(du+u\frac{\varphi'}{2}dz\right)-Z\left[d\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{u}\frac{\psi'}{2}dz\right]=0.$$

Cela étant, si l'on pose encore

$$(24)\qquad v=\frac{u}{Z},\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{v}=\frac{Z}{u},$$

d'où

$$\frac{1}{Z}\,du=dv-ud\left(\frac{1}{Z}\right)=dv+v\frac{dZ}{Z},$$

$$Zd\left(\frac{1}{u}\right)=d\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{u}dZ=d\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{v}\frac{dZ}{dz},$$

l'équation (23) et, par suite, l'équation (19) elle-même, se réduira à

$$(25)\qquad dv+v\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)dz=d\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{v}\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right)dz$$

$\left(\text{on a mis } Z' \text{ au lieu de } \frac{dZ}{dz}\right)$, vu qu'en effet,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\varphi'-\psi'=\frac{(AD_1-A_1D)z^3+\begin{pmatrix}BD_1-B_1D\\+AE_1-A_1E\end{pmatrix}z^2+\begin{pmatrix}CD_1-C_1D\\+BE_1-B_1E\end{pmatrix}z+CE_1-C_1E}{[A][D]},\\&2\frac{Z'}{Z}=\frac{d[D]}{[D]}-\frac{d[A]}{[A]},\end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned}
&2\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)\\
&=\frac{[BD-A(E+D_1)]z^3+\begin{bmatrix}B_1D-A_1(E+D_1)\\+2(CD-AE_1)\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}C(E+D_1)-BE_1\\+2(C_1D-A_1E_1)\end{bmatrix}z+C_1(E+D_1)-B_1E_1}{[A][D]},\\
&2\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right)\\
&=\frac{\begin{bmatrix}BD-A(E+D_1)\\-(AD_1-A_1D)\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}B_1D-A_1(E+D_1)\\+2(CD-AE_1)\\-\begin{pmatrix}BD_1-B_1D\\+AE_1-A_1E\end{pmatrix}\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}C(E+D_1)-BE_1\\+2(C_1D-A_1E_1)\\-\begin{pmatrix}CD_1-C_1D\\+BE_1-B_1E\end{pmatrix}\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}C_1(E+D_1)-B_1E_1\\-(CE_1-C_1E)\end{bmatrix}}{[A][D]}.
\end{aligned}\right.$$

Maintenant, comme l'équation (25) peut s'écrire sous la forme

$$(29)\qquad \left\{\frac{d\left[ve^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)dz}\right]}{e^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)dz}}=\frac{d\left[\frac{1}{v}e^{-\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right)dz}\right]}{e^{-\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right)dz}},\right.$$

on voit sans peine qu'il sera aisé de trouver son intégrale, non-seulement dans le cas que l'on vient de considérer (20), et, par suite, dans le cas particulier (d), où en effet l'équation (29) se réduit à

$$dw=e^{\int_0^z\left(2\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'+\psi'}{2}\right)dz}\,d\left(\frac{1}{w}\right),$$

w designant $ve^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'+\psi'}{4}\right)dz}$, dont l'intégrale générale est

$$(30)\qquad w=\text{const}=ve^{\int_0^z\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'+\psi'}{4}\right)dz}=ue^{\frac{\varphi+\psi}{4}},$$

ou, en effet, la (22) elle-même, mais encore aussi dans les trois nouveaux cas suivants, savoir :

1°. Lorsque

$$\frac{Z'}{Z} + \frac{\varphi'}{2} \text{ est} = 0,$$

attendu qu'alors l'équation (29) se réduit d'abord à

$$(29') \qquad dv = \frac{d\left(\frac{1}{v} e^{\int_0^z \frac{\varphi' - \psi'}{2} dz}\right)}{e^{\int_0^z \frac{\varphi' - \psi'}{2} dz}} = \frac{d\left(\frac{1}{v} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}\right)}{e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}},$$

puis, au moyen du facteur v, à

$$v\,dv = \frac{d\left(\frac{1}{v} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}\right)}{\frac{1}{v} e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}},$$

et que, par suite, l'intégrale générale sera alors

$$(30') \qquad v^2 e^{v^2} = C e^{\varphi - \psi}.$$

2°. Lorsque

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{\psi'}{2} \text{ est} = 0,$$

attendu que l'équation se réduit alors à

$$(29'') \qquad \frac{d\left(v e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}\right)}{e^{\frac{\varphi - \psi}{2}}} = d\left(\frac{1}{v}\right),$$

laquelle, après division par v, fournira l'intégrale générale

$$(30'') \qquad \left(\frac{1}{v}\right)^2 e^{\left(\frac{1}{v}\right)} = C e^{\varphi - \psi};$$

et, enfin, 3° lorsque

$$(31)\qquad \mu\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}\right)\text{ est }=\rho\left(\frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}\right),$$

(μ et ρ constantes), ou, ce qui revient au même,

$$(\mu-\rho)\frac{Z'}{Z}=-\left(\mu\frac{\varphi'}{2}-\rho\frac{\psi'}{2}\right);$$

partant, si l'on excepte le cas déjà traité $\mu=\rho$ (c'est-à-dire $\varphi'=\psi'$), lorsque

$$\frac{Z'}{Z}\text{ est }=-\frac{\mu\frac{\varphi'}{2}-\rho\frac{\psi'}{2}}{\mu-\rho},$$

et, par conséquent,

$$\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}=-\frac{\rho}{\mu-\rho}\cdot\frac{\varphi'-\psi'}{2},\qquad \frac{Z'}{Z}+\frac{\psi'}{2}=-\frac{\mu}{\mu-\rho}\cdot\frac{\varphi'-\psi'}{2}.$$

Dans ce cas, l'équation (29) se réduit d'abord à

$$\frac{d\left(ve^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)}{e^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}}=\frac{d\left(\frac{1}{v}e^{\frac{\mu}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)}{e^{\frac{\mu}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}},$$

ou bien, si l'on désigne ici par w l'une quelconque des expressions entre crochets [ ], et que par exemple on fasse

$$w=ve^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}},$$

à celle-ci :

$$(29''')\qquad dw=e^{-\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}\frac{\varphi-\psi}{2}}d\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)=\left(e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)^{-\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}}d\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right),$$

puis, au moyen du facteur $w^{\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}}$, à

$$w^{\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}}dw=\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)^{\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}}d\left(\frac{1}{w}e^{\frac{\varphi-\psi}{2}}\right);$$

d'où il suit que dans ce cas l'intégrale générale, si l'on excepte seulement les deux particularités $\frac{\mu+\rho}{\mu-\rho}=\pm 1$ [c'est-à-dire les deux cas précédents (1°) et (2°), savoir, $\rho=0$, $\mu=0$], se réduira à

$$\frac{\omega^{\frac{2\mu}{\mu-\rho}}}{\frac{2\mu}{\mu-\rho}}=\frac{\left(\omega e^{-\frac{\varphi-\psi}{2}}\right)^{\frac{2\rho}{\mu-\rho}}}{\frac{2\rho}{\mu-\rho}}+\text{const.},$$

c'est-à-dire, à

$$\mu\left[\upsilon^2 e^{-\frac{\mu}{\mu-\rho}(\varphi-\psi)}\right]^{\frac{\rho}{\mu-\rho}}+\rho\left[\upsilon^2 e^{-\frac{\rho}{\mu-\rho}(\varphi-\psi)}\right]^{\frac{\mu}{\mu-\rho}}=\text{const}.$$

ou bien

$$(30''')\qquad \mu(\upsilon^2)^{\frac{\rho}{\mu-\rho}}+\rho(\upsilon^2)^{\frac{\mu}{\mu-\rho}}=Ce^{\frac{\mu\rho}{(\mu-\rho)^2}(\varphi-\psi)},$$

qui sera ainsi l'intégrale de l'équation (29) ou (25), toutes les fois que la condition (31) est remplie, au moins si l'on excepte les trois cas particuliers,

$$(32)\qquad \mu=0,\quad \rho=0,\quad \mu-\rho=0;$$

et dans ces derniers cas l'intégrale est fournie, respectivement, par les formules (30''), (30') et (30).

Nota. En mettant dans (30''') $\rho-\varpi$ au lieu de μ, on la réduit à

$$\left[\frac{\rho}{\varpi}(\upsilon^2+1)-1\right](\upsilon^2)^{-\frac{\rho}{\varpi}}=Ce^{\frac{\rho}{\varpi}\left(\frac{\rho}{\varpi}-1\right)(\varphi-\psi)},$$

qui sera, par suite, l'intégrale de l'équation (29) ou (25), lorsque la condition (31) ou, ce qui revient au même, la condition

$$\frac{Z'}{Z}+\frac{\varphi'}{2}=\frac{\rho}{\varpi}\cdot\frac{\varphi'-\psi'}{2}$$

(ρ et ϖ constantes), sera remplie, au moins si l'on excepte les trois cas

particuliers,

$$\rho - \varpi = 0, \quad \rho = 0, \quad \varpi = 0.$$

Et en posant ici, pour abréger, λ au lieu de $\frac{\rho}{\varpi}$, l'on voit bien que

$$(33) \qquad [\lambda(v^2 + 1) - 1]v^{-2\lambda} = Ce^{\lambda(\lambda-1)(\varphi-\psi)},$$

sera l'intégrale de l'équation (29) ou (25), lorsque la condition

$$(34) \qquad \frac{Z'}{Z} + \frac{\varphi'}{2} = \lambda . \frac{\varphi' - \psi'}{2}$$

(λ étant une constante), sera remplie, au moins si l'on excepte les deux cas particuliers,

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1;$$

et dans ces cas enfin l'intégrale est fournie, respectivement, par les formules (30′) et (30″).

Cela étant, il importe d'observer que, tout comme l'égalité (20) renferme le cas (d), de même les trois égalités (1°), (2°), (3°), qu'on vient de considérer, renferment aussi trois nouveaux cas [autres que les précédents (a), (b), (c), (d)] dans lesquels on peut trouver sans peine l'intégrale de l'équation (19) ou de (5) elle-même, aucun des deux systèmes de conditions (15) et (16) n'étant rempli [*]. Effectivement, si dans les équations (30′), (30″), (33) au lieu de v^2 on remet encore $\frac{u^2}{z^2}$, c'est-à-dire $\frac{[A]}{[D]}y$, eu égard en outre aux formules (26), (27), (28), on obtiendra immédiatement le résultat suivant :

(e) *Dans le cas où les coefficients de l'équation* (5) *remplissent le système de conditions*

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= BD - A(E + D_1) = \begin{bmatrix} B_1 D - A_1(E + D_1) \\ + 2(CD - AE_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(E + D_1) - BE_1 \\ + 2(C_1 D - AE_1) \end{bmatrix} = C_1(E + D_1) - B_1 E, \end{aligned} \right.$$

---

[*] Et, par suite, aucune des deux quantités [A] et [D] n'étant pas non plus = 0.

son intégrale générale sera

$$(36)\qquad \frac{[A]y}{[D]} e^{\frac{[A]y}{[D]}} = Ce^{\varphi - \psi};$$

(f) *Lorsque les coefficients sont tellement composés que chacune des quatre expressions dans* (35) *soit = à celle des quatre dans* (21) *qui a le même nombre d'ordre*, l'intégrale sera

$$(36')\qquad \frac{[D]}{[A]y} e^{\frac{[D]}{[A]y}} = Ce^{\varphi - \psi};$$

et enfin

(g) *Dans le cas plus général où les quatre expressions dans* (35) *sont, non plus égales à, mais proportionnelles à celles de même nombre d'ordre parmi les quatre dans* (21), c'est-à-dire, où

$$(37)\qquad BD - A(E + D_1) \text{ soit } = \lambda(AD_1 - A_1 D), \ldots$$

(λ étant une constante, autre que o ou 1), l'intégrale générale sera

$$(36'')\qquad \left[\lambda \frac{[A]y}{[D]} + \lambda - 1\right] \left[\frac{[D]}{[A]y}\right]^{\lambda} = Ce^{\lambda(\lambda - 1)(\varphi - \psi)}.$$

Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ on a bien, respectivement, les formules (36) et (36') elles-mêmes.

Reste à savoir si l'équation (29) ou (25), et, par conséquent, l'équation (19) ou (14) ou bien l'équation (5) elle-même est, ou n'est pas, intégrable *en général* (dans le sens ordinaire). Mais c'est bien dans ce détail-là que, comme nous l'avons dit précédemment, nous ne pouvons pas entrer ici.

5. Après avoir, suivant le plan précédemment indiqué du présent Mémoire, fait passer en revue les divers cas particuliers, dans lesquels l'intégrale de l'équation (5) se présente, pour ainsi dire, d'elle-même, nous observerons, en passant, que c'est parmi ces espèces mêmes de l'équation (5) que se trouve aussi celle de Jacobi précédemment citée (mais bien *sans* les termes F et F_1), savoir, l'équation (5''') elle-même, ce que l'on voit sans peine en la comparant à l'équation (β) dans la note sous l'introduction ci-dessus, et qu'en effet son intégrale

sera donnée toujours par l'équation $(17''')$, excepté seulement le cas très-particulier où ses coefficients remplissent en outre le système des conditions (16), dans lequel cas enfin l'intégrale est fournie par la formule $(17')$; et nous allons actuellement considérer l'équation complète (1), dans le but qui se trouve indiqué brièvement à la fin de l'introduction.

§ III.

6. Tout comme (*voy.* § I) l'équation complète (4) par la *position* (9), je veux dire en posant les équations (9), peut être ramenée à la forme $(4')$ toutes les fois qu'il existe des constantes finies α et β, propres à satisfaire aux deux conditions (10), de même aussi, comme on le voit aisément, l'équation complète (1) pourra, par la même position, être délivrée de ses termes F et F_1, et ainsi ramenée à la forme (5), savoir,

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \left\{ A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + \begin{array}{l} D \\ +2A\alpha \\ +B\alpha \end{array} \middle| \xi + \begin{array}{l} E \\ +B\alpha \\ +2C\beta \end{array} \middle| \eta \right\} d\xi \\ \quad + \left\{ A_1\xi^2 + B_1\xi\eta + C_1\eta^2 + \begin{array}{l} D \\ +2A_1\alpha \\ +B_1\beta \end{array} \middle| \xi + \begin{array}{l} E_1 \\ +B_1\alpha \\ +2C_1\beta \end{array} \middle| \eta \right\} d\eta. \end{array}\right.$$

seulement, dans les cas où il existera effectivement des constantes finies α et β propres à satisfaire aux deux conditions suivantes :

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0, \\ A_1\alpha^2 + B_1\alpha\beta + C_1\beta^2 + D_1\alpha + E_1\beta + F_1 = 0. \end{array}\right.$$

Nota. S'il existait *toujours* de telles constantes α et β, on en pourrait définitivement conclure qu'il n'y aurait aucun moyen d'intégrer l'équation (5) *en général*, attendu qu'il est bien clair que, si *toute* équation (5) était intégrable, aussi *toute* équation (1) pourrait être rendue intégrable par ladite transformation (s'il existait bien toujours des constantes finies α et β); ce qui est pourtant de toute impossibilité, comme on le sait. Mais comme, au contraire, il n'existe pas toujours

des constantes finies α et β, propres à satisfaire aux conditions (39), il n'y a pas non plus lieu de décider de cette manière la question de l'intégrabilité de l'équation (5) en général. Au reste, il est bien clair aussi que, s'il pouvait être montré que l'équation (1) dans quelqu'un des cas où elle n'est pas intégrable se ramène à la forme (5), ladite question serait aussi par là décidée.

De plus, les coefficients des ξ^2, $\xi\eta$, η^2 dans l'équation (38), que l'on obtient par la transformation ci-dessus, étant tout à fait identiques aux coefficients, respectivement, des x^2, xy, y^2 dans l'équation complète (1), on est par là conduit évidemment à chercher l'intégrale de *toute équation* (1) *dont les coefficients* A, B, C, A_1, B_1, C_1, *remplissent le système de conditions* (15), c'est-à-dire de l'équation *jacobique* (3) elle-même, sur la même voie, précisément où l'on parvient (*voy.* § 1) à l'intégrale de l'équation complète (4). Qu'en effet cette recherche réussisse parfaitement, c'est ce que nous allons montrer à présent.

7. En effet, en considérant l'équation différentielle

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &(Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx \\ &-(Bx^2 + Cxy - D_1x - E_1y - F_1)\,dy = 0, \end{aligned}\right.$$

on voit d'abord que, dans le cas particulier où les deux termes F, F_1 sont $= 0$ l'un et l'autre, cette équation se réduit à l'équation $(5''')$ elle-même, qu'on vient de traiter ci-dessus dans le cas (c), et que, par suite, son intégrale sera donnée alors par la formule $(17''')$, ou bien, si en même temps le système de conditions (16) est rempli, par la formule $(17')$.

Mais dans tout *autre* cas elle pourra, au moyen de la position (9), être délivrée de ses termes F et F_1, et en même temps réduite à la forme $(5''')$, savoir :

$$(41)\qquad 0 = \left\{ B\xi\eta + C\eta^2 + \left.\begin{array}{r} D \\ +B\beta \end{array}\right| \xi + \left.\begin{array}{r} E \\ +B\alpha \\ +2C\beta \end{array}\right| \eta \right\} d\xi + \left\{ B\xi^2 + C\xi\eta - \left.\begin{array}{r} D_1 \\ +2B\alpha \\ +C\beta \end{array}\right| \xi - \left.\begin{array}{r} E_1 \\ +C\alpha \end{array}\right| \eta \right\} d\eta,$$

toutes les fois qu'il existera des constantes finies α et β propres à sa-

tisfaire aux deux conditions

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{l} B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0,\\ B\alpha^2 + C\alpha\beta - D_1\alpha - E_1\beta - F_1 = 0; \end{array}\right.$$

et il sera montré ici qu'en effet, *dans les cas exceptionnels où il n'existe point de telles* α *et* β, *les variables dans l'équation* (40) *pourront être séparées immédiament, c'est-à-dire sans l'aide de ladite transformation.*

Pour cet effet, considérons en premier lieu le cas où

$$B \textit{ n'est pas } = 0.$$

En divisant par B, les conditions (42) se réduisent à la forme

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha\beta + \mathfrak{C}\beta^2 + \mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{E}\beta + \mathfrak{F} = 0,\\ \alpha^2 + \mathfrak{C}\alpha\beta - \mathfrak{D}_1\alpha - \mathfrak{E}_1\beta - \mathfrak{F}_1 = 0. \end{array}\right.$$

1°. *Lorsque* $\mathfrak{D}$ *est* $= 0$, l'on pourra satisfaire à la première, savoir, à

$$(44)\qquad \alpha\beta = -(\mathfrak{C}\beta^2 + \mathfrak{E}\beta + \mathfrak{F}),$$

En premier lieu, par $\beta = 0$, dans le seul cas $\mathfrak{F} = 0$,

et alors l'autre, savoir, $\alpha^2 - \mathfrak{D}_1\alpha - \mathfrak{F}_1 = 0$ fournira toujours une valeur finie de α;

En second lieu, $\mathfrak{F}$ n'étant pas $= 0$, par

$$\alpha = -\frac{\mathfrak{C}\beta^2 + \mathfrak{E}\beta + \mathfrak{F}}{\beta},$$

à savoir, β n'étant pas $= 0$, et, du reste, en vertu de l'équation inférieure (43), donnée par

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{C}(\mathfrak{E} - \mathfrak{D}_1)\\ + \mathfrak{E}_1 \end{array}\right| \beta^3 + \left.\begin{array}{c} \mathfrak{E}(\mathfrak{E} + \mathfrak{D}_1)\\ + \mathfrak{C}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_1 \end{array}\right| \beta^2 + \mathfrak{F}(2\mathfrak{E} + \mathfrak{D}_1)\beta + \mathfrak{F} = 0,$$

par conséquent toujours finie (autre que zéro), excepté seulement le cas très-particulier où les coefficients ici de β^3, β^2, β seraient $= 0$ tous ensemble, c'est-à-dire où l'on aurait

$$-\mathfrak{D}_1 = 2\mathfrak{E}, \quad -\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{E}, \quad -\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{F}.$$

Or dans ces cas l'équation (40), après division par B, se réduit à

$$[(x+\mathcal{E})y+\mathfrak{S}y^2+\mathcal{F}]dx-[(x+\mathcal{E})^2+\mathfrak{S}(x+\mathcal{E})y-\mathfrak{S}\mathcal{F}]dy=0.$$

ou, faisant $x+\mathcal{E}=\xi$, à

$$(\xi+\mathfrak{S}y)(yd\xi-\xi dy)+\mathcal{F}(d\xi+\mathfrak{S}dy)=0,$$

et par suite, en posant $\xi+\mathfrak{S}y=z$, à celle-ci :

$$z(ydz-zdy)+\mathcal{F}dz=0,$$

dans laquelle on peut évidemment séparer les variables. — Ainsi, en résumé, dans ce dernier cas exceptionnel il n'y aura pas besoin, ni l'on ne le pourra non plus au moyen de la position (9), de délivrer l'équation *jacobique* de ses termes $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$; elle se réduit alors, après division par B, à l'aide de la position

(45) $$x+\mathfrak{S}y+\mathcal{E}=z,$$

à une équation où les variables y et z pourront être séparées aisément.

2°. *Lorsque, au contraire,* $\mathfrak{D}$ *n'est pas* $=0$, alors, comme la première des équations (43), savoir,

$$\alpha(\beta+\mathfrak{D})+\mathfrak{S}\beta^2+\mathcal{E}\beta+\mathcal{F}=0,$$

où j'ai mis γ au lieu de $\beta+\mathfrak{D}$, se ramène à la formule (44), savoir, à

(44′) $$\alpha\gamma=-[\mathfrak{S}\gamma^2+(\mathcal{E}-2\mathfrak{S}\mathfrak{D})\gamma+\mathfrak{S}\mathfrak{D}^2+\mathcal{F}],$$

et en même temps la dernière (43) à

$$\alpha^2+\mathfrak{S}\alpha\gamma-(\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}\mathfrak{D})\alpha-\mathcal{E}_1\gamma+\mathfrak{D}\mathcal{E}_1-\mathcal{F}_1=0,$$

il est clair que le raisonnement demeurera bien le même que dans le cas précédent, pourvu que

Au lieu de	β	on dise ici	γ,
»	$\mathcal{E}$	»	$\mathcal{E}-2\mathfrak{S}\mathfrak{D}$,
»	$\mathcal{F}$	»	$\mathcal{F}+\mathfrak{S}\mathfrak{D}^2$,
»	$\mathfrak{D}_1$	»	$\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}\mathfrak{D}$,
»	$\mathcal{F}_1$	»	$\mathcal{F}_1-\mathfrak{D}\mathcal{E}_1$.

Concevons, en second lieu, que

$$\text{B } soit = 0, \text{ } mais \text{ } non \text{ } pas \text{ } \mathcal{E}.$$

Comme alors l'équation de Jacobi (40) a la forme

$$(Cy^2 + Dx + Ey + F)dx - (Cxy - D_1 x - E_1 y - F_1) dy = 0$$

(F et F_1 n'étant pas $= 0$ tous deux à la fois), ou, après division par C,

$$(40') \quad (y^2 + \mathcal{D}x + \mathcal{E}y + \mathcal{F})dx - (xy - \mathcal{D}_1 x - \mathcal{E}_1 y - \mathcal{F}_1)dy = 0,$$

et qu'en même temps les équations de conditions (42), après division par C, se réduisent à celles-ci :

$$(46) \quad \begin{cases} \beta^2 + \mathcal{D}\alpha + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F} = 0, \\ \alpha\beta - \mathcal{D}_1\alpha - \mathcal{E}_1\beta - \mathcal{F}_1 = 0; \end{cases}$$

l'on en conclura, 1° *lorsque* $\mathcal{D}$ *n'est pas* $= 0$,

$$\begin{cases} \alpha = - \dfrac{\beta^2 + \mathcal{E}\beta + \mathcal{F}}{\mathcal{D}}, \\ \beta^3 + (\mathcal{E} - \mathcal{D}_1)\beta^2 + (\mathcal{D}\mathcal{E}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{E} + \mathcal{F})\beta + \mathcal{D}\mathcal{F}_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{F} = 0, \end{cases}$$

par conséquent toujours des valeurs finies de α et β ; et

2°. *Lorsque* $\mathcal{D}$ *est* $= 0$, il est clair que l'on pourra prendre pour β l'une quelconque des deux

$$-\frac{\mathcal{E}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}^2}{4} - \mathcal{F}\right)},$$

et que par suite, en vertu de la dernière (46), ou

$$(\beta - \mathcal{D}_1)\alpha = \mathcal{E}_1\beta + \mathcal{F}_1,$$

l'on aura toujours une valeur finie de α correspondante, au moins si l'on en excepte le seul cas où les deux expressions

$$-\left(\mathcal{D}_1 + \frac{\mathcal{E}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}^2}{4} - \mathcal{F}\right)}$$

sont $=$ o l'une et l'autre, c'est-à-dire le cas où l'on a à la fois

$$\mathfrak{D}_1 = -\frac{\mathcal{E}}{2}, \quad \mathfrak{F} = \frac{\mathcal{E}^2}{4}.$$

Or dans ce cas exceptionnel l'équation (40') se réduit à

$$\left(y+\frac{\mathcal{E}}{2}\right)^2 dx - \left[\left(y+\frac{\mathcal{E}}{2}\right)x - \mathcal{E}_1 y - \mathfrak{F}_1\right]dy = 0,$$

ou bien, par la position $y+\frac{\mathcal{E}}{2}=\eta$, à

$$\eta(\eta\,dx - x\,d\eta) + \left[\mathcal{E}_1\left(\eta - \frac{\mathcal{E}}{2}\right) + \mathfrak{F}_1\right]d\eta = 0,$$

dans laquelle on pourra évidemment séparer les variables.

Enfin, pour ce qui concerne le cas

$$B = 0 = C,$$

il suffit de rappeler qu'il est déjà traité dans ce qui a été dit (§ **1**) de l'équation différentielle (4).

8. Après avoir ainsi montré *que* et *combien* pour l'espèce particulière de l'équation (1) que fournit effectivement l'équation de Jacobi (3), et, par suite, aussi celle d'Euler (2), l'intégration peut s'effectuer d'une manière tout à fait analogue à celle dont on se sert ordinairement pour l'équation (4), il ne nous reste plus, pour l'effet qui se trouve indiqué dans l'Introduction de ce Mémoire, qu'à ajouter enfin quelques mots des espèces de l'équation complète (1) qui correspondent aux espèces de l'équation (5), dont se constituent les divers cas particuliers désignés (§ **2**) par les lettres (b), (d), (e), (f) [*].

Pour trouver les espèces de l'équation complète (1) dont il s'agit ici, il faudrait, à la rigueur, chercher quelles sont, parmi les équations de la forme (1), celles qui, par la position (9), se laissent réduire à des équations (5) composées comme celles des cas qu'on vient de nommer. Cependant nous ne pouvons pas avoir ici l'intention de poursuivre cette recherche en détail; dans les lignes suivantes nous ne ferons que men-

---

[*] Il est bon de remarquer ici, en passant, qu'en effet l'équation de Jacobi est *la seule* des espèces de l'équation (1) qui, à l'aide de la position (9), puisse se réduire à une équation (5) telle que celle dont se constitue le cas (c).

tionner seulement deux des espèces en question, pour faire juger, au moins, combien une pareille recherche pourrait offrir d'intérêt.

(A) Pour apprendre quelles sont, parmi les équations complètes (1) [*], celles qui au moyen de la position (9) pourront être transformées en de *telles* équations (5) dont les coefficients remplissent le système de conditions (16), il suffit d'observer, 1° que par ladite position l'on pourra en effet réduire l'équation (1) à la forme (5), savoir à (38), toutes les fois qu'il existera des constantes finies, α et β, propres à satisfaire aux conditions (39); et 2° que, pour la nouvelle équation ainsi obtenue, le système de conditions (16) se réduira évidemment au suivant :

$$(16')\quad \left\{\begin{aligned} &D + 2A\alpha + B\beta = 0,\\ &\left.\begin{aligned}&D_1 + 2A_1\alpha + B_1\beta\\ &+ E + B\alpha + 2B\beta\end{aligned}\right\} = 0,\\ &E_1 + B_1\alpha + 2C_1\beta = 0.\end{aligned}\right.$$

En effet, on en peut conclure définitivement qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1) propres à se laisser réduire, au moyen de la position (9), à la forme en question, que celles dont les coefficients, et en même temps des quantités finies α et β, remplissent à la fois et les conditions (39) et les trois précédentes (16'), ou, ce qui revient au même, les cinq conditions suivantes [**] :

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &A\alpha^2 - C\beta^2 - E\beta - F = 0,\\ &A_1\alpha^2 - C_1\beta^2 + D_1\alpha + F_1 = 0,\\ &D + 2A\alpha + B\beta = 0,\\ &\left.\begin{aligned}&D_1 + 2A_1\alpha + B_1\beta\\ &+ E + B\alpha + 2C\beta\end{aligned}\right\} = 0,\\ &E_1 + B_1\alpha + 2C_1\beta = 0;\end{aligned}\right.$$

---

[*] Évidemment nous entendons parler des équations (1) où les termes F et F_1 ne manquent pas tous les deux à la fois.

[**] On voit bien aisément que les deux premières d'entre elles ne sont que le résultat qu'on obtient en éliminant des équations (39) les lettres D et E_1, au moyen de la première et de la troisième des formules (16').

d'où l'on voit aussi en outre qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1), *dont les coefficients* EUX-MÊMES *satisfassent au système de conditions* (16), c'est-à-dire des équations de la forme

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey + F)dx$$
$$+ (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + Ex + F_1)dy = 0$$

(F et F_1 n'étant pas $= 0$ tous les deux à la fois), qui soient réductibles, au moyen de la position (9), à la forme dont il s'agit ici, que celles dont les coefficients, conjointement avec des quantités finies α et β, remplissent les cinq conditions suivantes :

$$(47')\quad\left\{\begin{array}{l} A\alpha^2 - C\beta^2 - E\beta - F = 0, \\ A_1\alpha^2 - C_1\beta^2 - E\alpha + F_1 = 0, \\ 2A\alpha + B\beta = 0, \\ \left.\begin{array}{r} 2A_1\alpha + B_1\beta \\ +\quad B\alpha + 2C\beta \end{array}\right\} = 0, \\ B_1\alpha + 2C_1\beta = 0. \end{array}\right.$$

(B) Comme pour l'équation (38) provenant de la position (9), le système de conditions (21) se réduit à

$$(21')\quad\left\{\begin{array}{l} AD_1 - A_1D + (AB_1 - A_1B)\beta = 0, \\ \left.\begin{array}{r} AE_1 - A_1E \\ + BD_1 - B_1D \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{r} (AB_1 - A_1B)\alpha \\ -2(AC_1 - A_1C)\beta \end{array}\right\} = 0, \\ \left.\begin{array}{r} BE_1 - B_1E \\ + CD_1 - C_1D \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{r} 2(AC_1 - A_1C)\alpha \\ -(BC_1 - B_1C)\beta \end{array}\right\} = 0, \\ CE_1 - C_1E - (BC_1 - B_1C)\alpha = 0, \end{array}\right.$$

on en peut conclure, de même que dans le cas précédent, qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1) réductibles au moyen de la position (9) à des équations de la forme (5) dont les coefficients remplissent le système des conditions (21), que celles dont les coefficients, et en même temps des quantités finies α et β, satisfont aux six conditions (39) et (21').

Par exemple. Comme le système de conditions (21) étant rempli par

les coefficients de l'équation complète (1) *eux-mêmes*, le système (21′) se réduit à

$$(21'') \qquad 0 = AB_1 - A_1B = AC_1 - A_1C = BC_1 - B_1C,$$

quelques valeurs finies qui soient assignées aux α et β (pourtant pas *zéro* à tous les deux à la fois), on peut énoncer définitivement qu'il n'y a pas d'autres équations complètes (1), *dont les coefficients eux-mêmes satisfont au système des conditions* (21), propres à être réduites, au moyen de la position (9), à des équations de la même espèce *sans* termes F et F_1, que celles où ces coefficients sont propres à remplir en même temps les conditions (21″) [*].

[*] Évidemment il n'en faut pas conclure, réciproquement, que chaque équation complète (1) dont les coefficients remplissent à la fois les deux systèmes (21) et (21″), se laisserait transformer toujours comme il vient d'être dit, par la position (9); en effet, le contraire s'est fait voir déjà par l'équation (7), dans la note sous l'Introduction ci-dessus; la propriété de satisfaire aux conditions (21) et (21″) est bien une condition *nécessaire*, mais non pas une condition *suffisante*, en tous cas, pour la possibilité de la transformation citée.

FIN DU TOME TROISIÈME (2e SÉRIE).

PARIS.—IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

ERRATA

POUR LE MÉMOIRE DE M. BJÖRLING

INSÉRÉ AU TOME XVII (1re SÉRIE).

Page 454, ligne 6 en remontant, effacez la virgule.

454, ligne 4 en remontant, *au lieu de* [*], *lisez* (1).

459, ligne 10, *au lieu de* toute, *lisez* toute la

460, ligne 5, même remarque.

460, ligne 13, *ajoutez le mot* assurément.

460, ligne 14, *au lieu de* 2, dans le dénominateur, *lisez* 4.

461, ligne 8, *au lieu de* dans, *lisez* comme dans.

464, dans la formule (17), *au lieu de* $\sin A_p - \frac{\nu}{\rho + p + 1} \cos A_p$,

lisez $\sin A_p + \frac{\nu}{\rho + p + 1} \cos A_p$.

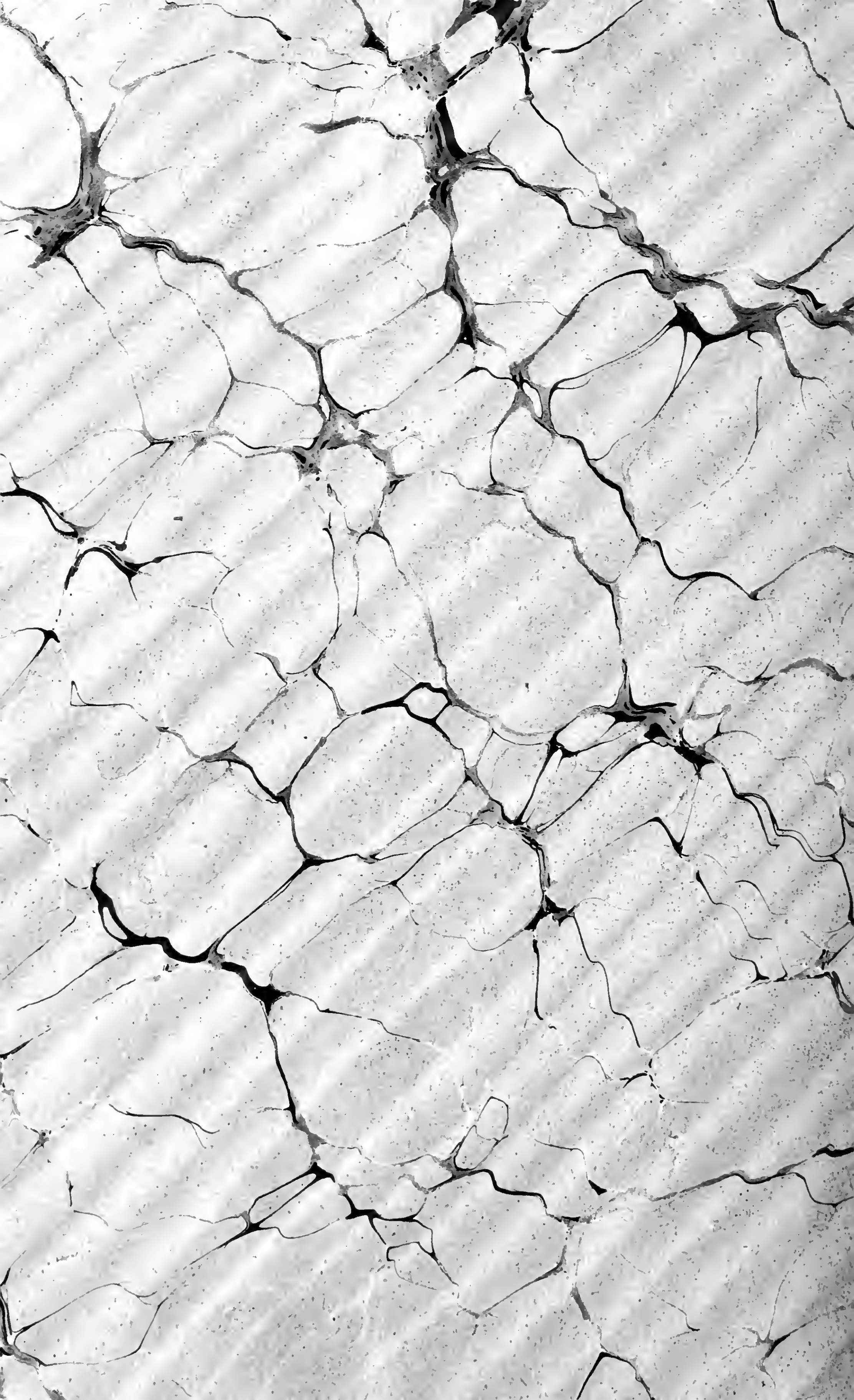
465, ligne 1 en remontant, *au lieu de* $\frac{\nu}{\rho + n - m}$, *lisez* $\frac{\nu}{\rho + n + m}$.

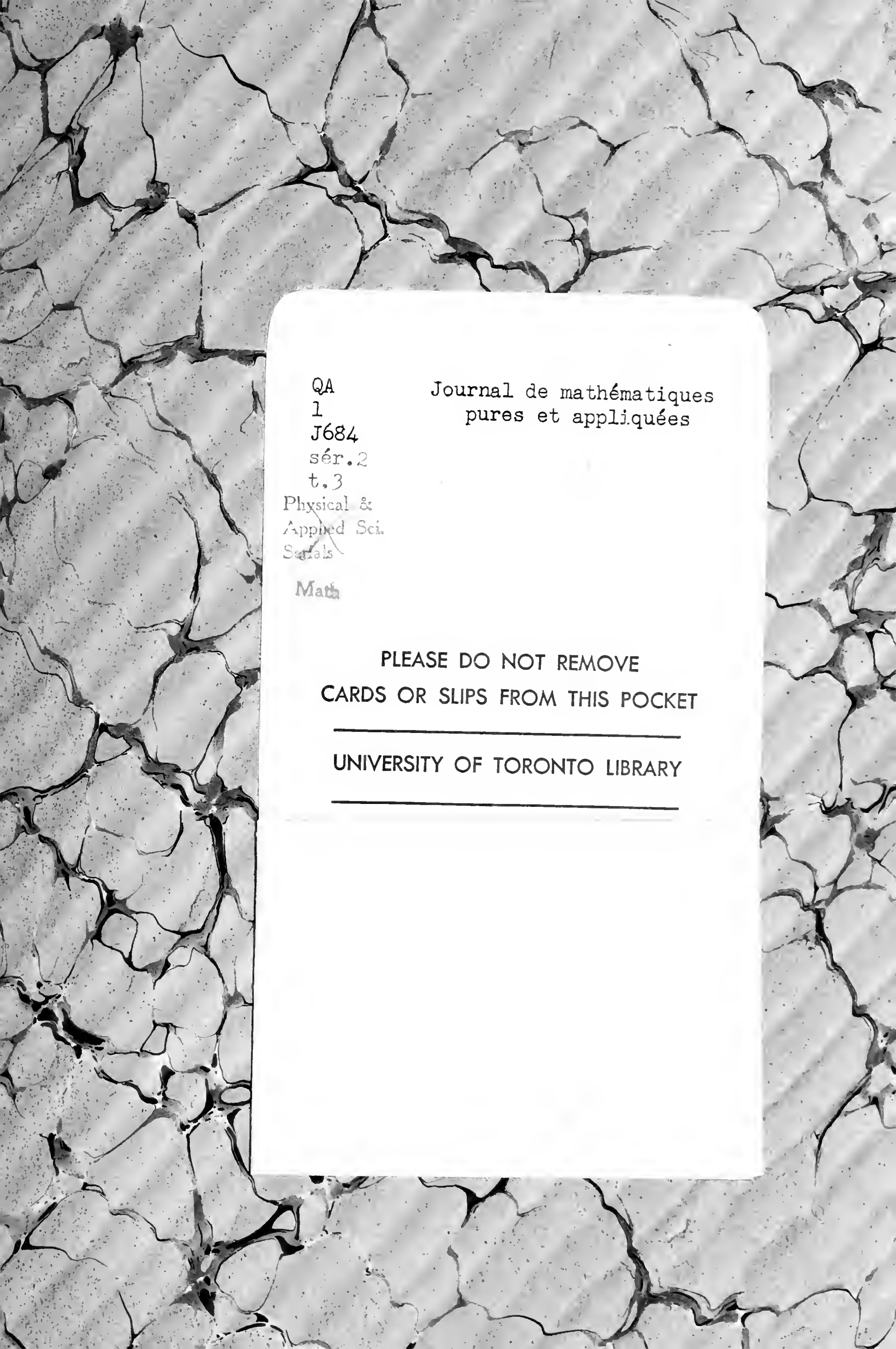
469, ligne 2 en remontant, *doit être marquée par* (15″).

472, ligne 8, *après* $x = -1$, *ajoutez* une virgule.

472, ligne 10, *au lieu de* de séries, *lisez* des séries.

472, dans la note sous le texte, *au lieu de* ou, *lisez* et ; *au lieu de* des coefficients du $\sqrt{-1}$, *lisez* du coefficient de $\sqrt{-1}$.




QA
1
J684
sér.2
t.3
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

